

THESIS / THÈSE

MASTER EN SCIENCES MATHÉMATIQUES

Le problème d'équilibre de Nash généralisé: définition, reformulation et méthodes de résolution

AVEREYN, Mélanie

Award date:
2010

[Link to publication](#)

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal ?

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.



**FACULTES UNIVERSITAIRES NOTRE-DAME DE LA PAIX
NAMUR**

Faculté des Sciences

Mélanie AVEREYN

**LE PROBLEME D'EQUILIBRE DE NASH GENERALISE.
DEFINITION, REFORMULATION ET METHODES DE RESOLUTION.**

**Mémoire présenté pour l'obtention
du grade académique de master en « **Sciences mathématiques** »**

Mélanie AVEREYN

Juin 2010

En préambule à ce mémoire, je souhaite adresser mes remerciements aux personnes qui m'ont apporté leur aide et qui ont contribué à l'élaboration de ce mémoire.

Tout d'abord, je tiens à remercier sincèrement Monsieur Jean-Jacques Strodiot qui, en tant que promoteur, s'est toujours montré à l'écoute et très disponible tout au long de la réalisation de ce mémoire.

Je n'oublie pas mes parents pour leur contribution, leur soutien et leur patience. Je tiens à exprimer ma reconnaissance envers Madame Marie-Christine Oger qui a eu la gentillesse de relire ce travail.

Enfin, j'adresse mes plus sincères remerciements à tous mes proches et amis, qui m'ont toujours soutenue et encouragée au cours de la réalisation de ce mémoire.

Le problème d'équilibre de Nash généralisé

Résumé

Le but de ce travail est d'étudier les propriétés du problème d'équilibre de Nash généralisé (noté GNEP) et de le reformuler sous différentes formes permettant de le résoudre numériquement. Tout d'abord, nous montrons que le problème GNEP peut se réduire à un problème d'inéquation variationnelle. Ensuite, en utilisant la fonction de Nikaido-Isoda régularisée nous présentons trois reformulations du problème GNEP sous forme de problème d'optimisation. Enfin nous déduisons une méthode de descente avec recherche linéaire ainsi qu'une méthode basée sur les projections. Pour chacune de ces méthodes nous décrivons les algorithmes correspondant et nous en étudions la convergence. Nous implémentons certains de ces algorithmes sur trois exemples afin d'étudier leur comportement.

Generalized Nash equilibrium problem

Abstract

The aim of this work is to study the generalized Nash equilibrium problem (for short, GNEP) and to reformulate it under different forms allowing to solve it numerically. First, we show that problem GNEP can be reduced to a variational inequality problem. Then, using the regularized Nikaido-Isoda-function, we present three reformulations of problem GNEP under the form of an optimization problem. Finally, we deduce a descent method with line search and a method with projections for solving it. For each of these methods, we give in detail the corresponding algorithms and we study their convergence. We test some of these algorithms on three problems to study their behavior.

Table des matières

Introduction	1
1 Problèmes d'équilibre	3
1.1 Convexité et monotonie : définitions et propriétés	3
1.2 Le problème d'équilibre : définition et exemples	5
1.2.1 Le problème d'optimisation	6
1.2.2 Le problème du point selle	6
1.2.3 Le problème d'optimisation convexe différentiable	6
1.2.4 Le problème d'inéquation variationnelle	7
1.2.5 Le problème de complémentarité non linéaire	7
1.2.6 Le problème d'inéquation quasi-variationnelle	10
1.2.7 Le problème du point fixe	10
1.2.8 Les problèmes multivoques	11
1.3 Le problème d'équilibre de Nash	14
1.3.1 Un modèle oligopolistique de l'électricité	16
2 Problème d'équilibre de Nash généralisé	21
2.1 Définition et exemple	21
2.2 Réduction à une inéquation variationnelle	23
2.3 Application : problème d'équilibre de Nash généralisé	27
3 Fonction de Nikaido-Isoda	32
3.1 Définition et proposition	32
3.2 Fonction de Nikaido-Isoda régularisée : définition, propriété et reformulation	33
3.3 Reformulation sous forme d'un problème d'optimisation différentiable avec contrainte	38
3.4 Reformulation sous forme d'un problème d'optimisation sans contrainte . .	43
3.4.1 Algorithme et convergence	47
4 Méthode de descente avec recherche linéaire	51
4.1 Hypothèses et définitions	51
4.2 Hypothèse de différentiabilité et conditions de satisfaction	55

4.3	Algorithme et convergence	60
5	Méthode de projections	65
5.1	Formulation du problème GNEP sous un problème QVIP	65
5.2	Propriétés des projections	66
5.3	Algorithmes	69
5.4	Convergence des algorithmes	76
5.5	Résultats numériques	84
	Conclusion	89
	Annexe	90
	A. Fonctions pseudo-convexe	90
	B. Conditions d'optimalité de Karush-Kuhn-Tucker	90
	C. Théorème de Danskin	91
	D. Semi-continuité	92
	E. Caractérisation des équilibres	92
	Bibliographie	96

Introduction

Dans ce mémoire, sur base de l'article [5] écrit par Facchinei F. et Kanzow C. *Generalized Nash equilibrium problems*, nous nous intéressons à un certain type de problèmes d'équilibre : le problème d'équilibre de Nash généralisé. Ce problème est un modèle important qui a ses racines en économie et dans bien d'autres domaines. L'objectif de ce mémoire est d'étudier les propriétés de ce problème et de voir comment on peut le reformuler comme un problème d'optimisation, d'inéquation variationnelle ou d'inéquation quasi-variationnelle pour ensuite en déduire quelques algorithmes de résolution. Ce mémoire s'organise comme suit.

Dans le premier chapitre, nous rappelons les définitions et propriétés importantes de la convexité. Nous définissons ce qu'est le problème d'équilibre au sens de Blum et Oettli. Ce problème est général et recouvre de nombreux problèmes mathématiques suivant le choix de la fonction d'équilibre. Comme cas particuliers on obtient entre autres, le problème d'optimisation, le problème du point fixe, le problème d'inéquations variationnelles et les problèmes d'inéquations multivoques. Nous nous intéressons spécialement au problème d'équilibre de Nash. Après en avoir donné la définition, nous montrons qu'il peut être ramené à un problème d'équilibre et nous en présentons une application.

Le chapitre suivant traite du problème d'équilibre de Nash généralisé. Après l'avoir défini, nous en donnons un exemple simple. Ensuite, nous le réduisons à un problème d'inéquation variationnelle. Nous verrons que toutes les solutions du problème GNEP ne sont pas préservées par cette réduction et nous introduisons alors les conditions de Karush-Kuhn-Tucker permettant de mettre en évidence quels types de solutions sont obtenues. Pour terminer ce chapitre, nous développons un exemple de problème d'équilibre de Nash généralisé.

Dans le troisième chapitre, nous introduisons la fonction de Nikaido-Isoda avec quelques-unes de ses propriétés. Nous en donnons sa définition et ses différentes propriétés. Cette fonction a le désavantage de ne pas être différentiable. Pour éviter cet inconvénient nous introduisons la fonction de Nikaido-Isoda régularisée. A l'aide de cette nouvelle fonction, nous abordons les différentes reformulations du problème d'équilibre de Nash généralisé sous forme d'un problème d'optimisation. Cependant, nous verrons que certaines reformu-

lations ne donnent pas toutes les solutions du problème GNEP mais seulement *l'équilibre de Nash normalisé*. Enfin, un algorithme est développé dans le cas où le problème reformulé est un problème d'optimisation différentiable sans contrainte. Sa convergence est ensuite démontrée.

Dans le quatrième chapitre, nous considérons une méthode de descente avec une recherche linéaire inexacte de type Armijo. Cette méthode sera applicable pour un certain type de problème GNEP et sous certaines hypothèses. Nous présentons des conditions suffisantes pour que ces hypothèses soient satisfaites. Pour clôturer le chapitre, nous montrons la convergence globale de l'algorithme correspondant et illustrons par un exemple sa vitesse de convergence.

Enfin, dans le dernier chapitre, nous développons des algorithmes faisant appel à des projections. Pour cela, nous reformulons notre problème d'équilibre de Nash généralisé en un problème d'inéquation quasi-variationnelle et imposons certaines hypothèses afin d'avoir un ensemble de solutions non vide. Nous rappelons quelques résultats importants des projections. Deux algorithmes sont alors développés. Le premier a recours à une recherche linéaire d'Armijo demandant une projection à chaque essai de pas. Cela est relativement coûteux. Pour palier à ce problème, nous développons un second algorithme où seulement deux projections sont effectuées mais sous une hypothèse supplémentaire. Nous montrons que ces algorithmes sont bien définis et que la convergence est garantie. Nous terminons ce chapitre en testant ces algorithmes sur trois exemples afin de décrire leurs comportements.

Chapitre 1

Problèmes d'équilibre

Dans ce chapitre, nous introduisons les principaux concepts utilisés dans ce mémoire. En particulier, nous rappelons les définitions de convexité et de monotonie ainsi que leurs propriétés principales. Ensuite, nous définissons le problème d'équilibre au sens de Blum et Oettli et nous expliquons à travers divers exemples l'intérêt de ce problème. Finalement, nous abordons plus en détail le problème d'équilibre de Nash.

1.1 Convexité et monotonie : définitions et propriétés

Commençons par rappeler la définition d'un ensemble convexe et d'une fonction convexe.

Définition 1.1.1. Une partie K de \mathbb{R}^n est dite convexe lorsque

$$\forall x, y \in K \quad \forall t \in [0, 1] \quad tx + (1 - t)y \in K.$$

En d'autres termes, K est convexe si pour tous x et y de K , le segment $[x, y]$ est entièrement contenu dans K . La figure 1.1 représente respectivement une partie convexe (gauche) et non-convexe (droite) de \mathbb{R} .

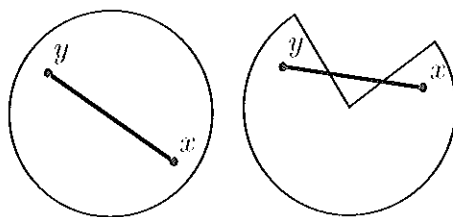


FIG. 1.1 – Ensembles convexe et non-convexe

Définition 1.1.2. Une fonction g à valeurs réelles est convexe sur une partie convexe K de \mathbb{R}^n si elle vérifie la relation suivante :

$$g(tx + (1-t)y) \leq tg(x) + (1-t)g(y) \quad \forall x, y \in K \quad \forall t \in [0, 1].$$

Définition 1.1.3. Une fonction $g : K \rightarrow \mathbb{R}$ est concave si la fonction $(-g)$ est convexe.

L'intérêt de travailler avec des fonctions convexes est que celles-ci génèrent des inégalités facilitant la recherche de minima. La convexité joue un rôle important en optimisation. Les problèmes d'optimisation convexes, autrement dit les problèmes d'optimisation dont l'ensemble admissible et la fonction objectif sont convexes, garantissent que tout minimum local est un minimum global.

La définition suivante est importante pour l'existence et l'unicité d'un minimum.

Définition 1.1.4. Une fonction $g : K \rightarrow \mathbb{R}$ est dite fortement convexe sur K de module $\alpha > 0$, si $g - \frac{\alpha}{2} \|\cdot\|^2$ est convexe, c'est-à-dire si

$$g(tx + (1-t)y) \leq tg(x) + (1-t)g(y) - \frac{\alpha}{2}t(1-t)\|y-x\|^2$$

pour tous $x, y \in K$ et pour tout $t \in (0, 1)$.

Remarquons que quand g est fortement convexe sur K (convexe, fermé et non vide), g a exactement un minimum global.

Rappelons à présent le concept de monotonicité d'une fonction $f : K \times K \rightarrow \mathbb{R}$.

Définition 1.1.5. Soit K une partie non vide convexe fermée de \mathbb{R}^n , et soit une fonction $f : K \times K \rightarrow \mathbb{R}$. La fonction f est dite

– monotone sur $K \subset \mathbb{R}^n$ si pour tous $x, y \in K$:

$$f(x, y) + f(y, x) \leq 0.$$

– strictement monotone sur $K \subset \mathbb{R}^n$ si pour tous $x, y \in K$, avec $x \neq y$:

$$f(x, y) + f(y, x) < 0.$$

– fortement monotone de module $\alpha > 0$ sur $K \subset \mathbb{R}^n$ si pour tous $x, y \in K$, on a :

$$f(x, y) + f(y, x) \leq -\alpha \|y - x\|^2.$$

– pseudo-monotone sur $K \subset \mathbb{R}^n$ si pour tous $x, y \in K$

$$f(x, y) \geq 0 \Rightarrow f(y, x) \leq 0.$$

Soit ensuite F un opérateur sur K à valeurs dans \mathbb{R}^n . Les définitions de pseudo-monotonicité et monotonicité deviennent :

Définition 1.1.6. Soit K une partie convexe et fermée de \mathbb{R}^n , et soit un opérateur $F : K \rightarrow \mathbb{R}^n$. L'opérateur F est

- pseudo-monotone sur $K \subset \mathbb{R}^n$ s'il vérifie l'inégalité suivante pour tous $x, y \in K$:

$$\langle F(y), x - y \rangle \geq 0 \Rightarrow \langle F(x), x - y \rangle \geq 0.$$

- monotone sur $K \subset \mathbb{R}^n$ s'il vérifie l'inégalité suivante pour tous $x, y \in K$:

$$\langle F(y) - F(x), y - x \rangle \geq 0.$$

L'opérateur F sera strictement monotone si l'inégalité est stricte lorsque $x \neq y$.

Définition 1.1.7. Un opérateur $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est non-expansif si pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|.$$

En particulier, T est fermement non-expansif si pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$\|Tx - Ty\|^2 \leq \langle x - y, Tx - Ty \rangle.$$

1.2 Le problème d'équilibre : définition et exemples

Maintenant que nous avons mis en place les outils nécessaires, nous pouvons définir le problème d'équilibre au sens de Blum et Oettli.

Définition 1.2.1. Soit K un ensemble non vide, fermé et convexe de \mathbb{R}^n et une fonction continue $f : K \times K \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$f(x, x) = 0 \quad \forall x \in K.$$

Le problème d'équilibre, noté PE , consiste à trouver un vecteur $x^* \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$x^* \in K \quad \text{et} \quad f(x^*, y) \geq 0 \quad \forall y \in K.$$

Suivant le choix de la fonction f , le problème d'équilibre peut être équivalent (et parfois même se réduire) à d'autres problèmes mathématiques tels que les problèmes d'optimisation ou d'inéquations variationnelles. Regardons plus en détail les différentes reformulations ou équivalences.

1.2.1 Le problème d'optimisation

Soit une fonction $g : K \rightarrow \mathbb{R}$ où K est un ensemble de \mathbb{R}^n fermé convexe et non vide.

Définition 1.2.2. Le problème d'optimisation, noté OP , consiste à trouver un vecteur

$$x^* \in K \quad \text{tel que} \quad g(x^*) \leq g(y) \quad \text{pour tout} \quad y \in K.$$

Ce problème peut être réécrit sous la forme :

$$\min\{g(x) | x \in K\}.$$

Remarquons que si nous posons

$$f(x, y) := g(y) - g(x),$$

le problème d'optimisation est équivalent au problème d'équilibre. De plus, dans ce cas, la fonction f est monotone.

1.2.2 Le problème du point selle

Soit K_1, K_2 deux parties convexes fermées non vides et soit une fonction $g : K_1 \times K_2 \rightarrow \mathbb{R}$.

Le point $(x_1, x_2) \in K_1 \times K_2$ est appelé point selle de g si

$$g(x_1, y_2) \leq g(y_1, x_2) \tag{1.1}$$

pour tout $(y_1, y_2) \in K_1 \times K_2$.

Nous avons alors la proposition suivante :

Proposition 1.2.1. Soit $K = K_1 \times K_2$ et soit la fonction $f : K \times K \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = g(y_1, x_2) - g(x_1, y_2).$$

Alors (x_1, x_2) est solution de PE si et seulement si (x_1, x_2) satisfait la propriété (1.1).

1.2.3 Le problème d'optimisation convexe différentiable

Soit $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable convexe. Notons $\nabla g(x)$ le gradient de la fonction g et considérons le problème de minimisation

$$\min_{x \in K} g(x). \tag{1.2}$$

Nous avons alors la proposition suivante

Proposition 1.2.2. Le vecteur x^* est une solution de (1.2) si et seulement si x^* satisfait l'inéquation suivante

$$x^* \in K \quad \text{et} \quad \langle \nabla g(x^*), y - x^* \rangle \geq 0 \quad \forall y \in K. \tag{1.3}$$

Si nous posons $f(x^*, y) := \langle \nabla g(x^*), y - x^* \rangle$, alors (1.3) est un exemple de PE .

1.2.4 Le problème d'inéquation variationnelle

Commençons par donner une définition du problème d'inéquation variationnelle.

Définition 1.2.3. Soient K une partie non vide, convexe et fermée de \mathbb{R}^n et $F : K \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue. Le problème d'inéquation variationnelle, noté $VIP(K, F)$ ou VIP , consiste à trouver un vecteur $x^* \in K$ qui vérifie l'inéquation :

$$\langle F(x^*), y - x^* \rangle \geq 0 \quad \forall y \in K.$$

Les problèmes d'inéquations variationnelles ont été beaucoup étudiés car ils permettent de généraliser les conditions d'optimalité classiques pour les problèmes d'extremum avec contraintes. Établissons par la proposition suivante le lien entre les problèmes d'inéquations variationnelles et le problème d'équilibre.

Proposition 1.2.3. Définissons la fonction $f : K \times K \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$f(x, y) = \langle F(x), y - x \rangle \quad \forall x, y \in K.$$

Alors le $VIP(K, F)$ et le problème d'équilibre sont équivalents.

De plus, nous pouvons établir, par la proposition suivante, le lien entre les problèmes d'inéquations variationnelles et les problèmes d'optimisation.

Proposition 1.2.4. Soient G une fonction convexe de classe C^1 et K un ensemble fermé et convexe. Les assertions suivantes sont équivalentes

1. x^* est solution du problème d'optimisation

$$\min_{y \in K} G(y).$$

2. x^* est une solution du $VIP(\nabla G, K)$:

$$\langle \nabla G(x^*), y - x^* \rangle \geq 0 \quad \forall y \in K.$$

1.2.5 Le problème de complémentarité non linéaire

Tout d'abord, rappelons-nous la définition d'un cône et du cône dual.

Définition 1.2.4. Une partie K de \mathbb{R}^n est appelée un cône, si $\lambda x \in K$ pour tout $x \in K$ et pour tout $\lambda > 0$.

Définition 1.2.5. Soit K un cône convexe fermé. Le cône dual de K , noté K^* , est

$$K^* = \{y \in \mathbb{R}^n : \langle y, x \rangle \geq 0 \quad \forall x \in K\}.$$

La figure¹ suivante illustre les deux définitions ci-dessus.

¹Source : Cohen G., *Convexité et optimisation*, p.27

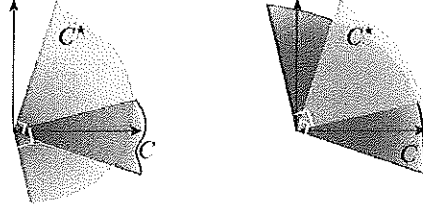


FIG. 1.2 -- Cône C et cône dual C^*

Le cône K^* est l'ensemble des vecteurs y de \mathbb{R}^n formant un angle aigu avec n'importe quel x appartenant à K . A ne pas confondre avec le cône polaire K^p qui lui est défini comme :

$$K^p = \{y \in \mathbb{R}^n : \langle y, x \rangle \leq 0 \quad \forall x \in K\}.$$

Définition 1.2.6. Le problème de complémentarité non linéaire, noté *NCP*, consiste à trouver un x^* tel que

$$x^* \in K, \quad T(x^*) \in K^*, \quad \text{et} \quad \langle T(x^*), x^* \rangle = 0, \quad (1.4)$$

où K^* désigne le cône dual de K .

Puisque $T(x^*)$ appartient au cône dual, on a :

$$\langle T(x^*), y \rangle \geq 0 \quad \forall y \in K.$$

D'autre part, par définition du *NCP* nous avons :

$$\langle T(x^*), x^* \rangle = 0.$$

En combinant ces deux relations, nous pouvons nous ramener au *PE*, en prenant :

$$f(x, y) = \langle T(x), y - x \rangle \quad \forall x, y \in K.$$

Remarquons que le problème de complémentarité est un problème d'inéquation variationnelle où K est un cône convexe fermé de \mathbb{R}^n . Enonçons formellement la propriété établissant que le *VIP* et le *NCP* ont les mêmes solutions.

Proposition 1.2.5. Soit K un cône convexe fermé de \mathbb{R}^n . Un vecteur $x^* \in K$ est solution du *VIP* si et seulement si x^* est solution du *NCP*.

Preuve

Supposons x^* solution du *NCP* et montrons que x^* est solution du *VIP*, c'est-à-dire que

$$\langle T(x^*), y - x^* \rangle \geq 0 \quad \forall y \in K.$$

Nous avons, par mise en évidence, pour tout x dans K :

$$\langle T(x^*), y - x^* \rangle = \langle T(x^*), y \rangle - \langle T(x^*), x^* \rangle.$$

Le second terme du membre de droite est nul par définition du NCP . Le premier terme est lui positif ou nul car $T(x^*)$ appartient au cône dual. D'où

$$\langle T(x^*), y - x^* \rangle \geq 0 \quad \forall y \in K$$

ce qui signifie que x^* est solution du VIP .

Réciproquement, supposons x^* solution du VIP et montrons que x^* est solution du NCP . Par définition, il est évident que $x^* \in K$. Il nous faut donc montrer que :

$$T(x^*) \in K^* \tag{1.5}$$

et

$$\langle T(x^*), x^* \rangle = 0 \quad \forall y \in K. \tag{1.6}$$

1. Vérifions la relation (1.6).

Par hypothèse nous avons que x^* est solution du VIP , c'est-à-dire que

$$\langle T(x^*), y - x^* \rangle \geq 0 \quad \forall y \in K.$$

En prenant $y = 0$, nous obtenons :

$$\langle T(x^*), x^* \rangle \leq 0$$

Prenons à présent $y = 2x^*$, ce qui nous donne :

$$\langle T(x^*), x^* \rangle \geq 0.$$

Nous pouvons alors déduire de ces deux inéquations que

$$\langle T(x^*), x^* \rangle = 0.$$

ce que nous devons vérifier.

2. Vérifions la relation (1.5).

Par le point précédent nous avons

$$0 \leq \langle T(x^*), y - x^* \rangle = \langle T(x^*), y \rangle - \langle T(x^*), x^* \rangle. \tag{1.7}$$

Or, nous savons que

$$\langle T(x^*), x^* \rangle = 0.$$

On a alors de l'équation (1.7) que :

$$\langle T(x^*), y \rangle \geq 0 \quad \forall y \in K$$

et donc $T(x^*) \in K^*$. Ce qui achève cette partie.

Nous pouvons à présent conclure, au vu des différentes vérifications, que x^* est solution du *NCP*.

□

1.2.6 Le problème d'inéquation quasi-variationnelle

Dans le problème d'inéquation variationnelle l'ensemble admissible K est une partie fixe de \mathbb{R}^n . Lorsque K dépend aussi de la variable x , le problème VIP est appelé quasi-variationnel. Formellement, le problème d'inéquation quasi-variationnelle s'énonce comme suit. Considérons un opérateur multivoque K de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^n . Pour chaque $x \in \mathbb{R}^n$, $K(x)$ est une partie (éventuellement vide) de \mathbb{R}^n . Considérons enfin un opérateur F de \mathbb{R}^n dans lui-même.

Définition 1.2.7. *Le problème d'inéquation quasi-variationnelle, noté $QVIP(K, F)$, consiste à trouver un vecteur $x^* \in K(x^*)$ tel que*

$$\langle F(x^*), x - x^* \rangle \geq 0 \quad \forall x \in K(x^*).$$

Dans le cas où $F \equiv 0$, le $QVIP(K, F)$ se réduit au problème qui consiste à trouver un vecteur x^* satisfaisant

$$x^* \in K(x^*).$$

Un tel vecteur x^* est appelé un *point fixe* de l'opérateur $K(\cdot)$.

1.2.7 Le problème du point fixe

Donnons tout d'abord la définition du problème du point fixe.

Définition 1.2.8. *Le problème du point fixe consiste à trouver un vecteur $x^* \in K$ tel que*

$$x^* = T(x^*)$$

où $T : K \rightarrow K$ est un opérateur continu et K un sous-ensemble convexe fermé de \mathbb{R}^n .

Enonçons à présent la proposition démontrant le lien de ce problème avec le *PF*.

Proposition 1.2.6. *Soit K un ensemble non vide, convexe et fermé de \mathbb{R}^n , et soit une fonction $f : K \times K \rightarrow \mathbb{R}$. Alors, pour tous $x, y \in K$, en posant $f(x, y) = \langle x - T(x), y - x \rangle$, le problème d'équilibre et le problème du point fixe sont équivalents.*

Preuve

Remarquons d'abord que par hypothèse $f(x, x) = 0$ pour tout $x \in K$.

\Rightarrow Si x^* est solution du problème du point fixe, alors x^* est solution de PE .

Par définition x^* vérifie l'équation $x^* = T(x^*)$, il est alors clair qu'il est aussi solution du PE .

\Leftarrow Si x^* est solution de PE , alors x^* est solution du problème du point fixe.

Nous avons par hypothèse l'inéquation suivante

$$0 \leq f(x^*, y) = \langle x^* - T(x^*), y - x^* \rangle. \quad (1.8)$$

Prenons $y = T(x^*)$ dans l'inéquation (1.8). Nous en déduisons

$$0 \leq f(x^*, T(x^*)) = -\|x^* - T(x^*)\|^2$$

ce qui implique que $T(x^*) = x^*$. Dès lors, x^* est solution du problème du point fixe.

□

De cette proposition nous voyons aisément que f est monotone quand T est non-expansif.

1.2.8 Les problèmes multivoques

Introduisons un lemme utile à la compréhension des deux exemples suivants.

Lemme 1.2.1. *Soit D un ensemble convexe et compact et soit aussi K un ensemble convexe. Soit $p : D \times K \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction concave, semi-continue supérieurement en son premier argument et convexe en son second argument. Supposons que*

$$\max_{\xi \in D} p(\xi, y) \geq 0 \quad \text{pour tout } y \in K.$$

Alors il existe $\bar{\xi} \in D$ tel que $p(\bar{\xi}, y) \geq 0$ pour tout $y \in K$.

Preuve

Supposons, pour obtenir une contradiction, que pour chaque $\xi \in D$ il existe un $y \in K$ et $\epsilon > 0$ tel que $p(\xi, y) < -\epsilon$. Alors les ensembles ouverts, définis par

$$S(y, \epsilon) := \{\xi \in D \mid p(\xi, y) < \epsilon\}$$

où $y \in K$ et $\epsilon > 0$, forment un recouvrement de l'ensemble compact D .

Par conséquent, il existe un sous-recouvrement fini $S(y_i, \epsilon_i)$, $i = 1, \dots, m$, de D . Posons ensuite $\epsilon = \min_i \epsilon_i$. Alors $D \subset \bigcup_i S(y_i, \epsilon_i)$ entraîne que

$$\min_i p(\xi, y_i) \leq -\epsilon \quad \text{pour tout } \xi \in D.$$

Puisque les fonctions $p(\cdot, y_i)$ sont concaves, il suit, du Théorème 21.1 de [11], qu'il existe des nombres réels $\mu_i \geq 0$, $i = 1, \dots, m$ avec $\sum_{i=1}^m \mu_i = 1$ tels que

$$\sum_{i=1}^m \mu_i p(\xi, y_i) \leq -\epsilon.$$

De plus, puisque $p(\xi, \cdot)$ est convexe, nous avons que $p(\xi, \bar{y}) \leq -\epsilon$ pour tout $\xi \in D$ avec $\bar{y} = \sum_{i=1}^m \mu_i y_i$. D'où

$$\max_{\xi \in D} p(\xi, \bar{y}) < 0,$$

ce qui contredit l'hypothèse du lemme.

□

Comme nous allons le voir par la suite, ce lemme prouve qu'un problème du point fixe multivoque est un problème d'équilibre.

Le problème du point fixe multivoque

Soit K un ensemble convexe fermé et non vide et soit $T : \mathbb{R}^n \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$ une application multivoque continue tel que $K \cap T(x)$ est un sous ensemble convexe compact et non vide de \mathbb{R}^n pour tout $x \in K$. Nous avons alors la définition suivante.

Définition 1.2.9. *Le problème du point fixe multivoque consiste à trouver un vecteur $x^* \in K$ tel que*

$$x^* \in T(x^*). \tag{1.9}$$

Le lien avec le problème d'équilibre s'exprime par la proposition suivante.

Proposition 1.2.7. *Posons $f(x, y) = \max_{\xi \in K \cap T(x)} \langle x - \xi, y - x \rangle$ pour tous $x, y \in K$. Alors le problème du point fixe multivoque est équivalent au problème d'équilibre.*

Preuve

Soit $x^* \in K$ tel que $x^* \in T(x^*)$. Prenons $\xi = x^*$, nous obtenons

$$f(x^*, y) \geq \langle x^* - x^*, y - x^* \rangle = 0$$

pour tout $y \in K$. D'où x^* satisfait le problème d'équilibre.

Réciproquement, soit $x^* \in K$ tel que $f(x^*, y) \geq 0$ pour tout $y \in K$. Nous devons montrer que

$$x^* \in T(x^*).$$

Par hypothèse, nous avons que

$$\max_{\xi \in K \cap T(x^*)} \langle x^* - \xi, y - x^* \rangle \geq 0 \quad \text{pour tout } y \in K.$$

En appliquant le Lemme 1.2.1, nous avons qu'il existe $\bar{\xi} \in K \cap T(x^*)$ tel que

$$\langle x^* - \bar{\xi}, y - x^* \rangle \geq 0 \quad \text{pour tout } y \in K.$$

En particulier pour $y = \bar{\xi}$, nous obtenons

$$\begin{aligned} \langle x^* - \bar{\xi}, \bar{\xi} - x^* \rangle &\geq 0 \\ - \|x^* - \bar{\xi}\|^2 &\geq 0 \\ \|x^* - \bar{\xi}\| &= 0 \\ x^* &= \bar{\xi}. \end{aligned}$$

D'où $x^* \in T(x^*)$ et $x^* \in K$ vu que $\bar{\xi} \in K \cap T(x^*)$.

□

Le problème d'inéquation variationnelle multivoque

Soit $T : K \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$ une application multivoque continue telle que $T(x)$ est non vide et compact pour tout $x \in K$. Nous avons alors la définition suivante.

Définition 1.2.10. *Le problème d'inéquation variationnelle multivoque consiste à trouver $x^* \in \mathbb{R}^n$ et $\xi^* \in \mathbb{R}^n$ tel que*

$$x^* \in K, \quad \xi^* \in T(x^*), \quad \langle \xi^*, y - x^* \rangle \geq 0$$

pour tout $y \in K$.

Posons

$$f(x, y) = \max_{\xi \in T(x)} \langle \xi, y - x \rangle.$$

Alors la fonction f a les propriétés suivantes :

- $f(x, x) = 0$ pour tout $x \in K$.
- $f(x, \cdot) = \max_{\xi} \langle \xi, \cdot - x \rangle$ est convexe.

Dès lors, nous avons la proposition suivante.

Proposition 1.2.8. *Le problème d'équilibre et le problème d'inéquation variationnelle multivoque sont équivalents.*

Preuve

Soient x^* et ξ^* solutions du problème d'inéquation variationnelle multivoque. Alors

$$f(x^*, y) = \max_{\xi \in T(x^*)} \langle \xi, y - x^* \rangle \geq \langle \xi^*, y - x^* \rangle \geq 0.$$

D'où x^* est solution du PE .

Réciproquement, considérons x^* une solution du PE . En appliquant le Lemme 1.2.1 avec $D = T(x^*)$ et $p(\xi, y) := \langle \xi, y - x^* \rangle$, nous observons que $p(\cdot, y)$ est concave, car linéaire, et continue en son premier argument et que $p(\xi, \cdot)$ est convexe en son second argument vu que $\langle \xi, \cdot - x^* \rangle$ est affine.

De plus, pour tout $y \in K$, nous avons

$$\max_{\xi \in T(x^*)} p(\xi, y) = \max_{\xi \in T(x^*)} \langle \xi, y - x^* \rangle = f(x^*, y) \geq 0.$$

Appliquant le Lemme 1.2.1, nous déduisons que $\xi^* \in T(x^*)$ est tel que

$$p(\xi^*, y) = \langle \xi^*, y - x^* \rangle \geq 0$$

pour tout $y \in K$.

D'où x^* et ξ^* sont solutions du problème d'inéquation variationnelle multivoque.

□

1.3 Le problème d'équilibre de Nash

Considérons deux joueurs 1 et 2 et leurs stratégies respectives $x^1 \in X_1$ et $x^2 \in X_2$. Le vecteur $(x^1, x^2) \in X_1 \times X_2$ constitue un équilibre de Nash si :

- lorsque le joueur 1 adopte la stratégie x^1 , le joueur 2 ne peut pas faire mieux que d'utiliser x^2 , et
- lorsque le joueur 2 adopte la stratégie x^2 , le joueur 1 ne peut pas faire mieux que d'utiliser x^1 .

Cette définition peut être généralisée à N joueurs qui suivent respectivement les stratégies x^1, x^2, \dots, x^N . Les stratégies x^1, x^2, \dots, x^N suivies par les joueurs $1, \dots, N$ constituent un équilibre de Nash si, pour chaque joueur i , la stratégie x^i est la meilleure stratégie à suivre pour i sachant que les autres joueurs suivent respectivement les stratégies

$x^1, x^2, \dots, x^{i-1}, x^{i+1}, \dots, x^N$. Donc, si on a un équilibre de Nash, aucun joueur n'aura de raison de suivre une autre stratégie que celle qui assure l'équilibre.

Ecrivons cela de manière plus formelle.

Désignons par N le nombre de joueurs, chaque joueur $i \in \{1, \dots, N\}$ contrôle les variables $x^i \in \mathbb{R}^{n_i}$. Désignons par $x = (x^1, \dots, x^N)^T$ le vecteur formé de toutes les variables de décision des joueurs, où $n = \sum_{i=1}^N n_i$. De plus, notons par x^{-i} le vecteur formé de toutes les variables de décision de tous les joueurs excepté du joueur i . Nous avons alors la notation $x = (x^i, x^{-i})$.

De plus, chaque joueur possède une fonction objectif $\theta_i : \mathbb{R}^{n_i} \rightarrow \mathbb{R}$, aussi appelée *fonction gain ou fonction perte*, qui dépend des variables x^i mais aussi des variables des autres joueurs x^{-i} . Nous supposons que ces fonctions objectifs sont au moins continues, et de plus que $\theta(x) = \theta(x^i, x^{-i})$ est convexe en x^i . Dans le problème d'équilibre de Nash, la variable x^i appartient à un ensemble convexe fermé et non vide $X_i \subset \mathbb{R}^{n_i}$, pour tout $i = 1, \dots, N$. Soit

$$X := X_1 \times \dots \times X_N$$

le produit cartésien de l'ensemble des stratégies de chaque joueur. Nous pouvons à présent définir le problème d'équilibre de Nash.

Définition 1.3.1. *Le vecteur $x^* \in X$ est un équilibre de Nash, ou une solution du problème d'équilibre de Nash, si la composante x^{*i} satisfait*

$$\theta_i(x^{*i}, x^{*-i}) \leq \theta_i(x^i, x^{*-i}) \quad \forall x^i \in X_i$$

pour tout $i = 1, \dots, N$.

En d'autres termes, le vecteur x^* est un équilibre de Nash si aucun joueur ne peut diminuer sa fonction objectif en changeant unilatéralement sa stratégie.

En vue d'écrire le problème d'équilibre de Nash sous la forme d'un problème d'équilibre, définissons :

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^N \theta_i(y^i, x^{-i}) - \theta_i(x^i, x^{-i}) \quad \forall x, y \in X.$$

Nous avons alors la proposition suivante.

Proposition 1.3.1. *Le vecteur $x^* \in X$ est un équilibre de Nash si et seulement si x^* est une solution du problème d'équilibre (PE)*

$$f(x^*, y) \geq 0 \quad \forall y \in X.$$

Preuve

Supposons que x^* soit un équilibre de Nash.

Pour tout $i = 1, \dots, N$, nous avons

$$\theta_i(x^{*i}, x^{*-i}) \leq \theta_i(x^i, x^{*-i}) \quad \forall x^i \in X_i.$$

Dans ce cas,

$$f(x^*, y) = \sum_{i=1}^N \theta_i(y^i, x^{*-i}) - \theta_i(x^{*i}, x^{*-i}) \geq 0 \quad \forall y \in X$$

et x^* est solution du problème d'équilibre.

Réciproquement, soit x^* une solution du problème d'équilibre.

Nous avons alors $f(x^*, y) \geq 0$. Il suffit de choisir, pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$, un vecteur $y \in X$ tel que

$$\theta_j(y^j, x^{*-j}) - \theta_j(x^{*j}, x^{*-j}) = 0 \quad \text{pour } j \neq i.$$

En d'autres termes, il suffit de prendre $y \in X$ tel que $y^j = x^{*j}$ avec $j \neq i$.

On a alors

$$0 \leq f(x^*, y) = \theta_i(y^i, x^{*-i}) - \theta_i(x^{*i}, x^{*-i}) \quad \forall y^i \in X_i.$$

Donc si x^* est solution du PE , alors il est un équilibre de Nash.

□

1.3.1 Un modèle oligopolistique de l'électricité

Les modèles d'équilibre de marché oligopolistique ont été introduit par Cournot. Un modèle de marché oligopolistique travaille avec plusieurs firmes (producteurs) qui produisent un produit homogène commun. Chaque firme tend à maximiser son profit en choisissant le niveau de production correspondant dans son ensemble de stratégies, en vertu de l'hypothèse que la production et la distribution des autres entreprises sont connues. Dans ce contexte, un équilibre de Nash est une production dans laquelle aucune entreprise ne peut augmenter ses bénéfices de manière unilatérale en changeant de stratégie. En d'autres termes, dans le cadre de ce concept d'équilibre, chaque entreprise détermine la meilleure stratégie tout en sachant les actions des autres entreprises. Dans ce qui suit, nous présentons un problème de production modélisé par un réseau avec un ensemble de nœuds \mathcal{N} et un ensemble d'arcs $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{N}$. Dans un premier temps, nous établissons les notations. Ensuite, nous développons le modèle avec ses contraintes. Finalement, nous verrons que ce modèle peut être formulé comme un problème d'équilibre de Nash.

Notations

Dans l'exemple suivant nous utilisons les notations suivantes. Nous désignons par M le nombre de producteurs de la marchandise. Posons x_{fa} pour désigner le flux de marchandise contrôlé par l'entreprise f du noeud $i \in \mathcal{N}$ adjacent à un noeud $j \in \mathcal{N}$ via le lien $a = (i, j) \in A$. Soit s_{fi} la quantité totale produite dans le site $i \in \mathcal{N}_f$ de l'usine f . Le coût de production est donné par la fonction de $C_{fi}(s_{fi})$ et la capacité de production est une donnée constante CAP_{fi} . De même, la notation d_{fj} désigne la quantité totale produite par la firme f livrée sur le site $j \in \mathcal{N}$. Finalement, nous avons que le montant total de la marchandise livrée au noeud j par l'ensemble des entreprises est donné par l'expression suivante :

$$Q_j \equiv \sum_{f=1}^M d_{fj}.$$

L'unité de prix d'achat de la marchandise sur le site $j \in \mathcal{N}$ est donné par la fonction de demande inverse $p_j(Q_j)$, qui dépend de la livraison totale de toutes les entreprises. L'unité de transfert des coûts encourus par l'entreprise f sur l'arc $a = (i, j) \in \mathcal{A}$ dépend de la quantité livrée et est notée $c_{fa}(x_{fa})$. Pour chaque noeud $i \in \mathcal{N}$, posons A_i^+ et A_i^- représentant, respectivement, l'ensemble des arcs $a \in \mathcal{A}$ avec i comme le début et la fin de noeud.

Modèle

En général, la production et la consommation d'électricité requièrent trois étapes : la production, la transmission et la distribution. Le modèle résultant dépendra de la formulation de ces trois étapes. Supposons que dans certaines régions il y ait des firmes qui produisent de l'électricité et que la transmission soit contrôlée à travers des contraintes de capacités. De plus, dans ce modèle, une firme f peut avoir plusieurs usines de production dans chacun de ses sites $i \in \mathcal{N}_f$. Notons que, dans ce modèle, la perte réelle de puissance due à la résistance du réseau et l'investissement dans la capacité de production d'électricité ne sont pas prises en considération. Nous avons alors, pour les étapes de production et de transmission, les notations suivantes. Soit $\mathcal{F} = \{1, \dots, M\}$ l'ensemble des firmes de production. Pour tout $f \in \mathcal{F}, i \in \mathcal{N}$ et $a \in \mathcal{A}$

- G_{fi} = l'ensemble d'usines de production possédées par la firme f au noeud $i \in \mathcal{N}_f$.
- CAP_{fih} = la capacité de production de l'usine $h \in G_{fi}$.
- CAP_a = la capacité de transmission sur le réseau a .
- y_{fih} = la quantité produite par l'usine $h \in G_{fi}$.
- ϱ_a = le prix de transmission sur le réseau a .

Chaque firme f souhaite déterminer les variables :

$$\{d_{fj} : j \in \mathcal{N}\}, \quad \{y_{fih} : i \in \mathcal{N}_f, h \in G_{fi}\}, \quad \text{et} \quad z^f = \{x_{fa} : a = (i, j) \in \mathcal{A}\}.$$

Nous posons $x \equiv (x^f : f \in \mathcal{F})$ le vecteur représentant les variables de décision de toutes les firmes et $z = (z^f : f \in \mathcal{F})$. Nous notons par x^{-f} le vecteur de décision de toutes les firmes excepté de la firme f . De plus, nous supposons que la fonction des prix de transmission $\varrho_a(z)$ est donnée. Les contraintes que doit satisfaire la firme f , sachant x^{-f} , est $K_f(x^{-f})$ où :

$$K_f(x^{-f}) \equiv \{x^f \geq 0 | y_{fih} \leq CAP_{fih} \quad \forall h \in G_{fk}, \forall i \in \mathcal{N}_f$$

$$d_{fi} + \sum_{a \in \mathcal{A}_i^+} x_{fa} = \sum_{h \in G_{fi}} y_{fih} + \sum_{a \in \mathcal{A}_i^-} x_{fa} \quad \forall i \in \mathcal{N}_f$$

$$d_{fi} + \sum_{a \in \mathcal{A}_i^+} x_{fa} = \sum_{a \in \mathcal{A}_i^-} x_{fa} \quad \forall i \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}_f$$

$$\sum_{f' \in \mathcal{F}} x_{fa} \leq CAP_a, \quad a \in \mathcal{A} \quad (*)$$

Remarquons que ces contraintes sont linéaires et que la dernière relation (*) est appelée contrainte de capacité de réseau et doit être satisfaite par toutes les firmes.

La fonction de profit de la firme f est donnée par :

$$\theta_f(x) = \sum_{j \in \mathcal{N}} d_{fj} p_j \left(\sum_{g=1}^M d_{gj} \right) - \sum_{i \in \mathcal{N}_f} \sum_{h \in G_{fi}} C_{fih}(y_{fih}) - \sum_{a \in \mathcal{A}} x_{fa} \varrho_a,$$

où $C_{fih}(y_{fih})$ est la fonction des prix de production de la firme f au site i et à l'usine $h \in G_{fi}$. On a alors que le problème de maximisation du profit de la firme f est :

$$\begin{cases} \max & \theta_f(x^f) \\ \text{tel que} & x^f \in K_f(x^{-f}) \end{cases}$$

où x^g pour $g \neq f$ et ϱ_a pour $a \in \mathcal{A}$ sont données. Donc la firme f anticipe l'action des autres firmes et les prix de transmission quand elle résout le problème de maximisation du profit. Dans ce cas le problème d'équilibre de Nash-Cournot nous est donné par la définition suivante.

Définition 1.3.2. *Le problème d'équilibre de Nash-Cournot consiste à trouver un vecteur $x = (x^1, \dots, x^M)$ tel que x^f est optimal pour la firme f et $\varrho_a = \varrho_a(z)$ pour tout $a \in \mathcal{A}$.*

A première vue, ce problème d'équilibre est un problème d'inéquation quasi-variationnelle dû à la dépendance de l'ensemble $K_f(x^{-f})$ en x , mais ce problème peut être reformulé comme un problème d'inéquation variationnelle (*VIP*).

Propriétés

En vue d'obtenir un problème d'inéquation variationnelle, posons \tilde{K}_f comme étant l'ensemble $K_f(x^{-f})$ sans la contrainte de capacité. Nous avons :

$$\tilde{K}_f \equiv \{x^f \geq 0 : y_{fih} \leq CAP_{fih}, \quad \forall h \in G_{fi}, \quad \forall i \in \mathcal{N}_f\}$$

$$\begin{aligned} d_{fi} + \sum_{a \in \mathcal{A}_i^+} x_{fa} &= \sum_{h \in G_{fi}} y_{fih} + \sum_{a \in \mathcal{A}_i^-} x_{fa} \quad \forall i \in \mathcal{N}_f \\ d_{fi} + \sum_{a \in \mathcal{A}_i^+} x_{fa} &= \sum_{a \in \mathcal{A}_i^-} x_{fa} \quad \forall i \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}_f \end{aligned}$$

Notons que l'ensemble \tilde{K}_f ne dépend pas de x . De plus, définissons

$$\Omega \equiv \{x : x \text{ satisfait la contrainte de capacité}\}.$$

Désignons par $d \equiv (d_{fi} : f \in \mathcal{F}, i \in \mathcal{N})$ le vecteur d'électricité délivré par toutes les firmes aux nœuds et finalement par $y \equiv (y_{fih} : f \in \mathcal{F}; i \in \mathcal{N}; h \in G_{fi})$ le vecteur de production d'électricité à toutes les usines.

Nous avons alors que les rendements marginaux des firmes sont

$$MR_{fi}(d) \equiv \frac{\partial \theta_f(x)}{\partial d_{fi}}, \quad (1.10)$$

et les coûts marginaux des firmes sont

$$MC_{fih}(y_{fif}) \equiv \frac{dC_{fih}(y_{fih})}{dy_{fih}}. \quad (1.11)$$

La fonction $F(d, y, z)$ est alors donnée par la définition suivante :

$$F(d, y, z) \equiv \begin{pmatrix} -MR_{fi}(d) & : & \forall f, i \\ MC_{fih}(y_{fih}) & : & \forall f, i, h \\ \varrho_a(z) & : & \forall a \in \mathcal{A} \end{pmatrix}. \quad (1.12)$$

Remarquons que les fonctions $\varrho_a(z)$ sont répétées M fois pour chacune des firmes. Finalement, posons

$$K \equiv \left(\prod_{f=1}^M \tilde{K}_f \right) \cap \Omega. \quad (1.13)$$

Le couple (K, F) donné par (1.12) et (1.13) nous permet de définir un problème d'inéquation variationnelle.

Proposition 1.3.2. *Supposons que chaque fonction $\theta_f(x)$ est concave en x^f pour chaque x^{-f} fixe mais arbitraire. Si $x \equiv (d, y, z)$ résout le VIP (K, F) , alors x est un point d'équilibre de Nash-Cournot du modèle oligopolistique d'électricité.*

Preuve

Soit x la solution du $VIP(K, F)$. Nous devons vérifier que pour chaque firme f , x^f résout le problème de maximisation de la firme avec x^g fixé pour $g \neq f$ et pour $\varrho_a \equiv \varrho_a(z)$.

Soit $\hat{x}^f \in K_f(x^{-f})$ pris arbitrairement. Comme le vecteur

$$\hat{x} \equiv (\hat{x}^f, x^{-f}),$$

appartient à K , nous avons

$$\langle F(x), \hat{x} - x \rangle \geq 0,$$

ce qui se réduit, après remplacement de F par sa valeur et en notant que $\theta_f(x)$ est concave en x^f , à

$$\langle \nabla_{x^f} \theta_f(x), \hat{x}^f - x^f \rangle \leq 0.$$

Nous avons donc que x est un point d'équilibre de Nash-Cournot du modèle oligopolistique d'électricité. Ce qui achève la preuve.

□

Chapitre 2

Problème d'équilibre de Nash généralisé

Dans ce chapitre, nous abordons le problème d'équilibre de Nash généralisé. Nous en donnons, dans un premier temps, sa définition. Ensuite, nous reformulons ce problème en un problème d'inéquation variationnelle. Finalement, nous exposons un exemple de problème d'équilibre de Nash généralisé en insistant sur les implications économiques des hypothèses de ce problème.

2.1 Définition et exemple

La définition standard d'un jeu non-coopératif requiert que chaque joueur a un ensemble admissible qui est indépendant des stratégies de ses rivaux. Cependant, dans la plupart des cas, l'interaction entre les joueurs peut prendre place au niveau de l'ensemble admissible. Si on assume que chaque ensemble admissible des joueurs dépend des stratégies de ses rivaux, nous parlons de *problème d'équilibre de Nash généralisé* que nous notons GNEP. Bien que le problème d'équilibre de Nash généralisé (GNEP) est un modèle qui a été utilisé dans beaucoup de domaines ces 50 dernières années, c'est seulement au milieu des années 90 que les recherches sur cette matière se sont accélérées. Dans une certaine mesure, nous pouvons dire que le GNEP généralise la situation du problème d'équilibre de Nash puisque désormais, la stratégie de jeu du joueur i dépend de la stratégie des autres joueurs aussi.

Introduisons à présent une définition plus formelle du problème. Tout comme dans le problème d'équilibre de Nash, nous utilisons les notations suivantes. Désignons par N le nombre de joueurs, chaque joueur $i \in \{1, \dots, N\}$ contrôle les variables $x^i \in \mathbb{R}^{n_i}$. Désignons par $x = (x^1, \dots, x^N)^T$ le vecteur formé de toutes les variables de décision des joueurs, où $n = \sum_{i=1}^N n_i$. De plus, notons par x^{-i} le vecteur formé de toutes les variables de décision de tous les joueurs excepté du joueur i . Nous avons alors la notation $x = (x^i, x^{-i})$. Chaque joueur a une fonction objectif, aussi appelée fonction gain ou fonction perte, θ_i qui dépend de ses variables x^i mais aussi des variables x^{-i} des autres joueurs. De plus, la stratégie de chaque joueur doit appartenir à l'ensemble $X_i(x^{-i}) \subseteq \mathbb{R}^{n_i}$ qui dépend des stratégies des autres joueurs. Le but du joueur i , étant donné les stratégies des autres joueurs x^{-i} , est de

choisir une stratégie x^i qui résout le problème de minimisation

$$\min_{x^i} \theta_i(x^i, x^{-i}) \quad \text{sous contrainte } x^i \in X_i(x^{-i}). \quad (2.1)$$

Nous avons aussi la formulation suivante.

Définition 2.1.1. *Le vecteur de stratégie $x^* \in \prod X_i(x^{*-i})$ est un équilibre de Nash généralisé, ou une solution du problème d'équilibre de Nash généralisé, si la composante x^{*i} satisfait*

$$\theta_i(x^{*i}, x^{*-i}) \leq \theta_i(x^i, x^{*-i}) \quad \forall x^i \in X_i(x^{*-i})$$

pour tout $i = 1, \dots, N$.

Pour chaque x^{*-i} , l'ensemble de solutions du problème (2.1) est désigné par $\mathcal{S}_i(x^{*-i})$. Le problème GNEP consiste alors à trouver un vecteur x^* tel que

$$x^{*i} \in \mathcal{S}_i(x^{*-i}) \quad \forall i = 1, \dots, N.$$

De plus, si nous désignons par $\mathcal{S}(x^*)$ l'ensemble $\mathcal{S}(x^*) := \prod_{i=1}^N \mathcal{S}_i(x^{*-i})$, nous voyons que nous pouvons dire que x^* est une solution si $x^* \in \mathcal{S}(x^*)$. Cela revient à dire que x^* est un point fixe de l'application \mathcal{S} .

Illustrons cette définition par un exemple simple.

Exemple 2.1.1. *Prenons l'exemple d'un jeu à deux joueurs, c'est-à-dire $N = 2$, avec $n_1 = 1$ et $n_2 = 1$, de sorte que chaque joueur contrôle une variable (par souci de simplicité nous avons noté $x := x_1$ et $y := x_2$). Supposons que les problèmes des joueurs sont respectivement, pour le joueur 1 et le joueur 2,*

$$\begin{array}{ll} \min_x & (x - 1)^2 \\ \text{tel que} & x + y \leq 1 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \min_y & (y - \frac{1}{2})^2 \\ \text{tel que} & x + y \leq 1 \end{array}$$

Les ensembles de solutions optimales sont donnés par

$$\mathcal{S}_1(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y \leq 0 \\ 1 - y & \text{si } y \geq 0 \end{cases} \qquad \mathcal{S}_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } x \leq \frac{1}{2} \\ 1 - x & \text{si } x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Et donc les solutions de ce problème sont données par $(\alpha, 1 - \alpha)$ pour chaque $\alpha \in [1/2, 1]$. Notons que le problème a une infinité de solutions, avec différentes valeurs pour les deux joueurs.

Dans l'exemple ci-dessus, les ensembles $X_i(x^{*-i})$ sont définis explicitement par des contraintes d'inégalités. Dans la suite, nous supposons que les ensembles $X_i(x^{*-i})$ sont donnés par

$$X_i(x^{*-i}) = \{x^i \in \mathbb{R}^i : g^i(x^i, x^{*-i}) \leq 0\} \quad (2.2)$$

où $g^i(\cdot, x^{*-i}) : \mathbb{R}^{n_i} \rightarrow \mathbb{R}^{m_i}$.

2.2 Réduction à une inéquation variationnelle

Dans cette section, nous faisons les hypothèses suivantes.

Hypothèse 1. 1. Pour chaque joueur i , θ_i est continuellement différentiable en x .

2. Pour chaque joueur i , la fonction objectif $\theta_i(\cdot, x^{-i})$ est pseudo-convexe¹ en x^i .

La deuxième hypothèse est très commune et souvent satisfaite dans les applications économiques travaillant avec le problème GNEP. La plupart du temps, elle apparait quand les joueurs se partagent des ressources disponibles en quantité limitée.

A présent, définissons une fonction $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ par

$$F(x) \equiv \begin{pmatrix} \nabla_{x^1} \theta_1(x) \\ \vdots \\ \nabla_{x^N} \theta_N(x) \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

Sous l'Hypothèse 1, on a le résultat suivant :

Théorème 2.2.1. Supposons que l'Hypothèse 1 est satisfaite et considérons l'ensemble $X_i(x^{-i})$ défini par

$$X_i(x^{-i}) := \{x^i : (x^i, x^{-i}) \in X\} \quad (2.4)$$

où $X \subset \mathbb{R}^n$ est fermé et convexe. Alors chaque solution du problème $VIP(X, F)$ est une solution du problème GNEP.

Preuve

Soit x^* une solution de $VIP(X, F)$. Nous allons montrer que pour chaque joueur i , la composante x^{*i} satisfait

$$\theta_i(x^{*i}, x^{*-i}) \leq \theta_i(x^i, x^{*-i})$$

¹Cette définition est rappelée en annexe

pour tout $x^i \in X_i(x^{*-i})$. Soit $x^i \in X_i(x^{*-i})$. Alors le vecteur

$$y \equiv \begin{pmatrix} x^{*1} \\ \vdots \\ x^{*i-1} \\ x^i \\ x^{*i+1} \\ \vdots \\ x^{*N} \end{pmatrix}$$

appartient à X , et par définition de $VIP(X, F)$, nous pouvons écrire

$$0 \leq \langle F(x^*), y - x^* \rangle,$$

ou de manière équivalente

$$\begin{aligned} 0 \leq & \underbrace{\langle \nabla_{x^1} \theta_1(x^{*1}, x^{*-1}), (x^{*i} - x^{*i}) \rangle}_{=0} + \dots \\ & + \langle \nabla_{x^i} \theta_i(x^{*i}, x^{*-i}), (x^i - x^{*i}) \rangle + \dots \\ & + \underbrace{\langle \nabla_{x^N} \theta_N(x^{*N}, x^{*-N}), (x^{*N} - x^{*N}) \rangle}_{=0}. \end{aligned}$$

Ainsi, après simplification, nous obtenons que

$$\langle \nabla_{x^i} \theta_i(x^{*i}, x^{*-i}), (x^i - x^{*i}) \rangle \geq 0 \quad \forall x^i \in X_i(x^{*-i}).$$

Utilisant ensuite l'hypothèse de pseudo-convexité de θ_i , nous déduisons que le vecteur x^{*i} satisfait

$$\theta_i(x^{*i}, x^{*-i}) \leq \theta_i(x^i, x^{*-i}) \quad \forall x^i \in X_i(x^{*-i}).$$

Ce qui termine la démonstration. □

Remarquons que le théorème ci-dessus ne dit pas que n'importe quelle solution du problème GNEP est aussi une solution du problème $VIP(X, F)$. En fait cela n'est pas vrai de manière générale. En effet, il peut arriver que le problème GNEP ait une solution et que le problème $VIP(X, F)$ n'en ait pas. Le but d'introduire un problème d'inéquation variationnelle est de trouver une solution du problème de Nash généralisé en résolvant un problème d'inéquation variationnelle. C'est pourquoi, nous devons être sûrs que le problème d'inéquation variationnelle a au moins une solution. La proposition suivante assure l'existence d'une solution pour le problème $VIP(X, F)$.

Proposition 2.2.1. *Sous les hypothèses du théorème 2.2.1 et sous l'hypothèse supplémentaire que l'ensemble X est compact, le problème $VIP(X, F)$ admet une solution qui est aussi une solution du problème $GNEP$ correspondant.*

Nous venons de voir qu'en passant du problème $GNEP$ à un problème d'inéquation variationnelle, toutes les solutions du problème $GNEP$ ne sont pas préservées. Cette sous-section va nous permettre de mettre en évidence quels types de solutions sont obtenues en résolvant le problème d'inéquation variationnelle. Dans ce but, nous allons spécifier une meilleure structure de l'ensemble X et introduire les conditions de Karush-Kuhn-Tucker² (noté KKT) pour le $GNEP$ et le problème d'inéquation variationnelle. A cette fin, nous supposons que X est défini par un nombre fini de contraintes, c'est-à-dire,

$$X \equiv \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) \leq 0\} \quad (2.5)$$

où $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ et nous supposons que toutes les contraintes $g_\nu : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\nu = 1, \dots, m$ sont convexes et continuellement différentiables.

Supposons que x est une solution du problème $GNEP$. Alors si pour le joueur i une contrainte de qualification est vérifiée, il y a un vecteur $\lambda^i \in \mathbb{R}^m$ de multiplicateurs tels que les conditions classiques de Karush-Kuhn-Tucker

$$\begin{aligned} \nabla_{x^i} \theta_i(x^i, x^{-i}) + \nabla_{x^i} g(x^i, x^{-i}) \lambda^i &= 0, \\ 0 \leq \lambda^i \perp -g(x^i, x^{-i}) &\geq 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

sont satisfaites. Notons que si une contrainte g_ν est inactive en x alors nécessairement le multiplicateur correspondant λ_ν^i est nul pour tous les joueurs. D'autre part, les multiplicateurs correspondant aux mêmes contraintes actives peuvent évidemment être différents pour chaque joueur. Nous allons montrer que les solutions du problème $GNEP$ qui sont préservées lors du passage à un problème d'inéquation variationnelle sont exactement celles pour lesquelles tous les joueurs ont les mêmes multiplicateurs pour toutes les contraintes.

Considérons les conditions de KKT pour le problème $VIP(X, F)$.

$$\begin{aligned} F(x) + \nabla_x g(x) \lambda &= 0, \\ 0 \leq \lambda \perp -g(x) &\geq 0. \end{aligned}$$

Considérons à présent la définition de F donnée par la relation (2.3), nous pouvons réécrire ces conditions sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \nabla_{x^1} \theta_1(x) \\ \vdots \\ \nabla_{x^N} \theta_N(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \nabla_{x^1} g(x) \\ \vdots \\ \nabla_{x^N} g(x) \end{pmatrix} \lambda &= 0, \\ 0 \leq \lambda \perp -g(x) &\geq 0. \end{aligned} \quad (2.7)$$

²Les conditions d'optimalité de Karush-Kuhn-Tucker sont rappelées en annexe

La relation entre ces deux conditions de KKT et une solution du *GNEP* est donnée par le théorème suivant. Ce dernier établit que la relation (2.7) est vérifiée si et seulement si la relation (2.6) est satisfaite avec le même multiplicateur pour tous les joueurs.

Théorème 2.2.2. *Supposons que le problème GNEP satisfait l'Hypothèse 1 et que les ensembles $X_i(x^{-i})$ sont définis par (2.4) avec X donné par (2.5) et convexes.*

1. *Soit x^* une solution du problème $VIP(X, F)$ vérifiant les conditions de KKT données par (2.7). Alors x^* est une solution du problème GNEP qui vérifie les conditions de KKT données par (2.6) avec $\lambda^1 = \lambda^2 = \dots = \lambda^N = \lambda$.*
2. *Réciproquement, soit x^* une solution du problème GNEP qui vérifie les conditions de KKT données par (2.6) avec $\lambda^1 = \lambda^2 = \dots = \lambda^N$. Alors x^* est une solution du problème $VIP(X, F)$.*

Preuve

1. Si la relation (2.7) est vérifiée, une comparaison avec la relation (2.6) montre que x^* satisfait les conditions de KKT données par (2.6) avec $\lambda^1 = \lambda^2 = \dots = \lambda^N = \lambda$. Par l'hypothèse de pseudo-convexité de θ_i et la convexité de X , ces conditions de KKT sont suffisantes pour garantir que x^* est une solution du problème GNEP.
2. Si x^* est une solution du problème GNEP qui vérifie les conditions de KKT données par (2.6) avec $\lambda^1 = \lambda^2 = \dots = \lambda^N$, les conditions de KKT données par (2.7) sont évidemment satisfaites avec $\lambda = \lambda^1$. La satisfaction de ces conditions assure que x^* est une solution du problème GNEP.

□

Reprenons à présent l'exemple 2.1.1. Nous avons vu que ce problème a une infinité de solutions à savoir $\{(\alpha, 1 - \alpha) \mid \frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1\}$. Puisque la qualification des contraintes est satisfaites (contraintes linéaires), pour chaque solution $(\alpha, 1 - \alpha)$ il y a des multiplicateurs uniques notés $\lambda(\alpha)$, pour le premier joueur, et $\mu(\alpha)$, pour le deuxième joueur qui satisfont les conditions de KKT. Si nous prenons le gradient du Lagrangien du problème d'optimisation des deux joueurs égal à zéro, nous en déduisons que

$$\lambda(\alpha) = 2 - 2\alpha, \quad \mu(\alpha) = 2\alpha - 1.$$

D'où, nous pouvons dire qu'il y a seulement une solution pour laquelle $\lambda(\alpha) = \mu(\alpha)$. Dans ce cas, α est égal à $\frac{3}{4}$ et le couple de solution et les multiplicateurs correspondant sont donnés par

$$(x^*, y^*) = \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right), \quad \bar{\lambda} = \frac{1}{2} = \bar{\mu}.$$

Considérons maintenant le problème $VIP(X, F)$ qui, dans ce cas, est obtenu en posant

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \leq 1\}, \quad \text{et} \quad F = \begin{pmatrix} 2x - 2 \\ 2y - 1 \end{pmatrix}.$$

F est fortement monotone et donc ce problème d'inéquation variationnelle admet une solution unique bien que l'ensemble X ne soit pas compact. La solution unique est donnée par

$$(x^*, y^*) = \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right).$$

Nous remarquons que le multiplicateur correspondant à l'unique contrainte qui définit X est $\frac{1}{2}$, c'est-à-dire la valeur commune du multiplicateur du problème d'équilibre de Nash généralisé pour le couple de solution $(\frac{3}{4}, \frac{1}{4})$. Nous voyons, par cet exemple, que le problème de Nash généralisé a une infinité de solutions alors que le problème $VIP(X, F)$ a seulement une solution. Et cette solution est la seule solution du problème généralisé pour lequel la contrainte commune a des multiplicateurs égaux.

2.3 Application : problème d'équilibre de Nash généralisé

Le traité de Kyoto a pour but de réduire les émissions de gaz à effet de serre. Chaque pays doit diminuer de 5 pourcents ses émissions par rapport au niveau de l'année 1990. Dans l'optique d'atteindre ce but, chaque pays a la possibilité d'utiliser trois stratégies à savoir : une mise en oeuvre commune (*Joint Implementation*), un mécanisme de développement propre (*Clean Development Mechanism*) ou un commerce d'émission (*Emission Trade*). Nous allons nous intéresser à la stratégie la plus intéressante (voir [3]) qui est la stratégie *Joint Implementation*. L'idée de cette stratégie est qu'elle autorise les pays ayant un coût de diminution des gaz à effet de serre élevé d'investir dans d'autres pays où le coût est plus faible pour atteindre leur objectif, par exemple, en investissant dans des projets tels que l'installation de filtres, en nettoyant un bassin fluvial etc. Il est attendu de cette stratégie qu'elle augmente le développement des technologies environnementales et permette de promouvoir la croissance économique durable des pays ayant une économie de transition.

Modèle

Pour ce modèle, nous considérons les notations et hypothèses suivantes. On désigne par $N = \{1, 2\}$ l'ensemble des joueurs (pays) impliqués dans l'effort de contrôle de la pollution et e_i les émissions résultant de la production industrielle du joueur i . De plus, nous supposons que les émissions brutes des sous-produits sont proportionnelles à la production industrielle. Cette hypothèse va permettre d'exprimer le revenu de la production

industrielle comme une fonction des émissions. La fonction de revenu du joueur i est concave et croissante et donnée par

$$e_i(b_i - \frac{1}{2}e_i); \quad 0 \leq e_i \leq b_i$$

avec b_i un paramètre donné. La notation I_{ij} désigne l'investissement dans un projet environnemental du pays i dans un pays j . D'où, si l'indice i représente un joueur donné et j un autre joueur nous avons $j \equiv 3 - i$. Le coût d'investissement est convexe et croissant. Nous supposons donc que le pays d'accueil a une option de premier choix en choisissant le projet disponible. Nous supposons que la fonction de coût est quadratique pour le joueur i dont l'expression est

$$\frac{1}{2}(I_{ii}^2 + (I_{jj} + I_{ij})^2 - I_{jj}^2).$$

Pour les investisseurs, le bénéfice de cet investissement, lié aux unités de réduction d'émission (URE), est supposé linéaire dans l'investissement et est donné par $\gamma_j I_{ij}$ avec $\gamma_j > 0$.

Pour une bonne modélisation de la situation, nous notons qu'il est important de distinguer les émissions nettes du pays et les émissions comptées du pays. Les émissions nettes du pays i , notées par R_i , sont données par

$$R_i = e_i - \gamma_i I_{ii} - \gamma_j I_{ij}.$$

Le terme R_i représente donc les émissions brutes moins les réductions résultant des investissements locaux et étrangers dans le même pays. Les émissions comptées, quant à elles, notées par A_i , sont données par

$$A_i = e_i - \gamma_i I_{ii} - \gamma_j I_{ij}.$$

C'est-à-dire les émissions moins la réduction résultant des investissements dans le pays et les crédits d'émission obtenus des investissements à l'étranger. De plus, chaque joueur est face à une contrainte environnementale qui demande que le joueur doit garder ses émissions comptées en dessous ou égales à un certain niveau $E_i > 0$, ce qui est donné par l'expression suivante

$$A_i \leq E_i.$$

Nous supposons que le coût de dommage, associé à la pollution, encouru par chaque pays dépend des émissions totales, c'est-à-dire, des émissions des deux pays. Ce coût est alors linéaire et donné par

$$d_i \left(\sum_{k=1}^2 R_k \right)$$

Nous supposons que le joueur i maximise sa fonction de bien-être qui est le revenu moins le coût de dommage et d'investissement. De manière plus formelle nous avons,

$$W_i = \left[e_i(b_i - \frac{1}{2}e_i) - \frac{1}{2}I_{ii}^2 - \frac{1}{2}I_{ij}^2 - I_{ii}I_{ij} - d_i \sum_{k=1}^2 R_k \right]. \quad (2.8)$$

Dans ce cas, les joueurs sont libres d'investir autant au niveau local qu'à l'étranger. Le problème d'optimisation du joueur i , sachant les actions e_j , I_{jj} et I_{ji} de l'autre joueur, est donné par

$$\left\{ \begin{array}{l} \max_{0 \leq e_i \leq b_i, I_{ii}, I_{ij} \geq 0} W_i^B = [e_i(b_i - \frac{1}{2}e_i) - (\frac{1}{2}I_{ii}^2 + \frac{1}{2}I_{ij}^2 + I_{ij}I_{jj}) - d_i \sum_{k=1}^2 R_k] \\ \text{t.q. } e_i - \gamma_i I_{ii} - \gamma_j I_{ij} \leq E_i \\ R_i = e_i - \gamma_i(I_{ii} + I_{ji}) \geq 0 \\ R_j = e_j - \gamma_j(I_{jj} + I_{ij}) \geq 0 \end{array} \right.$$

Remarquons que les joueurs ne coordonnent pas leurs stratégies d'investissement et d'émissions, mais ont accès chacun l'un à l'autre pour investir dans des projets de réduction d'émissions. De plus, chaque problème d'optimisation a comme contrainte que les émissions nettes de tous les joueurs sont positives. Cela est dû au fait que les contraintes du joueur j impliquent les variables de décisions du joueur i et donc affectent la faisabilité d'actions du joueur i . Dans l'optique d'interpréter E_i dans la contexte du protocole, nous devrions poser $E_i = (1 - \tau_i)e_i^{1990}$, où e_i^{1990} correspond aux émissions de l'année 1990 et τ_i est le taux de réduction pour le pays i . Ces émissions peuvent être obtenues, en supposant qu'en 1990, le pays i résout le problème d'optimisation donné par (2.8) sans investir dans la réduction d'émission.

Caractérisation des solutions

Dans ce cas, le Lagrangien du problème d'optimisation du joueur i est donné par

$$\mathcal{L}_i^B(e_i, I_{ii}, I_{ij}, \eta_i, \beta_i) = e_i(b_i - \frac{1}{2}e_i) - \frac{1}{2}I_{ii}^2 - \frac{1}{2}I_{ij}^2 - I_{ij}I_{jj} - d_i \sum_{k=1}^2 R_k + \sum_{k=1}^2 \eta_{ik} R_k + \beta_i(E_i - A_i)$$

où β_i et $\eta_i = (\eta_{i1}, \eta_{i2})$ sont des multiplicateurs de Lagrange correspondant respectivement aux contraintes environnementales et de positivités. Nous nous limitons à analyser le cas où les contraintes positives d'émissions nettes sont inactives pour l'un ou l'autre joueur, c'est-à-dire, $\eta_{ii} = \eta_{ij} = \eta_{ji} = \eta_{jj} = 0$. Supposons une solution interne, alors les conditions nécessaires d'un équilibre de Nash sont

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}_i^B}{\partial e_i} &= 0 \Rightarrow e_i = b_i - d_i - \beta_i & i = 1, 2. \\ \frac{\partial \mathcal{L}_i^B}{\partial I_{ii}} &= 0 \Rightarrow I_{ii} = \gamma_j(d_i + \beta_i) & i = 1, 2. \end{aligned} \tag{2.9}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_i^B}{\partial I_{ij}} = 0 \Rightarrow I_{ij} = \gamma_j(d_i + \beta_i) - I_{jj} \quad i = 1, 2.$$

$$\beta_i \geq 0, \quad (E_i - e_i + \gamma_i I_{ii} + \gamma_j I_{ij}) \geq 0, \quad \beta_i(E_i - e_i + \gamma_i I_{ii} + \gamma_j I_{ij}) = 0, \quad i = 1, 2.$$

Remarquons que $e_i \geq 0$ implique que $R_i \geq 0$ et que les conditions nécessaires impliquent que $e_i < b_i$ et $I_{ii} > 0$. Si le signe de I_{ij} est positif, alors la stratégie de mise en oeuvre commune est utilisée.

Proposition 2.3.1. *Si un équilibre de Nash existe dans ce jeu et si $IR_i^n > 0$ pour $i = 1, 2$. Alors*

$$I_{ij}^n I_{ji}^n = 0$$

Preuve

En utilisant les conditions nécessaires d'un équilibre de Nash

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}_i^B}{\partial I_{ij}} &= -I_{ij} - \gamma_j(-d_i - \beta_i + d_j + \beta_j) \\ \frac{\partial \mathcal{L}_j^B}{\partial I_{ji}} &= -I_{ji} + \gamma_i(-d_i - \beta_i + d_j + \beta_j) \end{aligned}$$

Supposons que $-d_i - \beta_i^B + d_j + \beta_j^B > 0$, alors $\frac{\partial \mathcal{L}_i^B}{\partial I_{ij}}$ est négatif pour $I_{ij} \geq 0$ et $I_{ij}^B = 0$, avec $I_{ji}^B = \gamma_i(-d_i - \beta_i^B + d_j + \beta_j^B) > 0$.

A présent, supposons que $-d_i - \beta_i^B + d_j + \beta_j^B < 0$, alors $\frac{\partial \mathcal{L}_j^B}{\partial I_{ji}}$ est négatif pour $I_{ji} \geq 0$ et $I_{ji}^B = 0$, avec $I_{ij}^B = -\gamma_j(-d_i - \beta_i^B + d_j + \beta_j^B) > 0$.

Finalement, remarquons que $-d_i - \beta_i^B + d_j + \beta_j^B = 0$ implique $I_{ij}^B = I_{ji}^B = 0$.

□

Le résultat de la proposition ci-dessus montre de manière rigoureuse qu'un joueur a plus d'investissement à l'équilibre dans cette stratégie. Ce qui était attendu puisque le but principal de cette stratégie est de canaliser les investissements des pays offrant les options les plus efficaces pour réduire les émissions. De plus, cette proposition montre sous quelles conditions le joueur investit à l'étranger. En effet, regardons à partir des conditions d'équilibre tous les équilibres possibles³ des deux joueurs en supposant que le joueur 2 a le plus haut coût de dommage, c'est-à-dire $d_2 - d_1 = D > 0$.

Les stratégies d'investissement à l'étranger pour le cas d'une stratégie de mise en oeuvre commune non-coopérative peut se synthétiser comme suit

- Si les contraintes environnementales sont inactives, c'est-à-dire $\beta_1 = \beta_2 = 0$, le joueur qui investit à l'étranger est celui qui a le plus important coût de dommage.
- Si les deux contraintes environnementales sont actives, le joueur qui investit à l'étranger est le joueur qui a le plus haut ratio $\frac{(b_i - E_i)}{(1 + \gamma_i^2)}$.

³Les détails des calculs sont repris en annexe.

- Si la contrainte environnementale est active pour le joueur qui a le plus important coût de dommage, alors le joueur investissant à l'étranger est celui qui a le plus important coût de dommage.
- Si la contrainte environnementale est active pour le joueur qui a le plus faible coût de dommage (appelé joueur 1), alors le joueur avec le plus haut coût de dommage (joueur 2) investit à l'étranger si son dommage est plus haut que le ratio $\frac{(b_i - E_i)}{(1 + \gamma_1^2)}$, sinon le joueur 1 investit à l'étranger.

Ces caractérisations des équilibres sont pour le cas où les contraintes de positivité sont inactives. Cependant, remarquons que l'hypothèse disant que les réductions dépendent seulement des conditions du pays accueillant est peu probable. En effet, en général il y a une dépendance de la technologie et des lois des investisseurs mais aussi du pays accueillant. Nous avons donc que le bénéfice lié à l'acquisition d'unité de réduction d'émissions (URE) est proportionnel à l'investissement, c'est-à-dire $\gamma_{ij} I_{ij}$. Nous allons donc établir le problème du pays i avec cette hypothèse supplémentaire.

Cette hypothèse supplémentaire implique d'une part, que les émissions nettes du pays i sont données par $e_i - \sum_{j=1}^N \gamma_{ji} I_{ji}$ qui de manière évidente ne sont pas négatives. D'autre part, les émissions comptées par le pays sont données par $e_i - \sum_{j=1}^N \gamma_{ij} I_{ij}$ qui sont donc les émissions du pays moins les URE gagnés en investissant dans des projets environnementaux. Pour conclure cette description, nous avons également que la pollution dans un pays peut affecter également d'autres pays. Par exemple, la pollution d'un fleuve dans un pays peut affecter un autre pays qui est croisé par le même fleuve ou encore l'influence des pluies acides sur la pollution atmosphérique dans les pays voisins etc. Nous supposons donc que les dommages de la pollution dans un pays dépendent des émissions nettes de tous les pays, selon une fonction

$$D_i \left(e_1 - \sum_{j=1}^N \gamma_{j1} I_{j1}, \dots, e_N - \sum_{j=1}^N \gamma_{jN} I_{jN} \right).$$

Avec cette hypothèse supplémentaire, le problème du joueur i devient

$$\left\{ \begin{array}{l} \max_{e_i, I_{i1}, \dots, I_{iN}} e_i (b_i - \frac{1}{2} e_i) - \sum_{j=1}^N I_{ij} - D_i (e_1 - \sum_{j=1}^N \gamma_{j1} I_{j1}, \dots, e_N - \sum_{j=1}^N \gamma_{jN} I_{jN}) \\ \text{t.q. } e_i, I_{i1}, \dots, I_{iN} \geq 0 \\ e_i - \sum_{j=1}^N \gamma_{ij} I_{ij} \leq E_i \\ e_i - \sum_{j=1}^N \gamma_{ji} I_{ji} \geq 0 \end{array} \right.$$

et devient un problème d'équilibre de Nash généralisé.

Chapitre 3

Fonction de Nikaido-Isoda

Dans ce chapitre, nous développons différentes reformulations du problème GNEP en problème d'optimisation à l'aide de la fonction de Nikaido-Isoda. Nous abordons dans un premier temps la définition et les propriétés de cette fonction. Ensuite, nous abordons les différentes reformulations du problème GNEP à l'aide de cette fonction. Finalement, nous développons un algorithme et en donnons sa convergence.

3.1 Définition et proposition

Dans le contexte du problème GNEP, nous supposons que chaque ensemble $X_i(x^{-i})$ est fermé et convexe. De plus, nous désignons par

$$\Omega(x) := X_1(x^{-1}) \times \cdots \times X_N(x^{-N})$$

le produit cartésien des ensembles de stratégies de chaque joueur. Le lemme suivant nous donne une propriété importante de l'ensemble $\Omega(x)$.

Lemme 3.1.1. *On a : $x \in \Omega(x)$ si et seulement si $x \in X$. En particulier, $\Omega(x) \neq \emptyset$ pour tout $x \in X$.*

Preuve

En utilisant la définition de l'ensemble $\Omega(x)$ et $X_i(x^{-i})$, nous obtenons

$$\begin{aligned} x \in \Omega(x) &\Leftrightarrow x^i \in X_i(x^{-i}) \quad \forall i = 1, \dots, N, \\ &\Leftrightarrow (x^i, x^{-i}) \in X \quad \forall i = 1, \dots, N, \\ &\Leftrightarrow x = (x^i, x^{-i}) \in X. \end{aligned}$$

La seconde partie du lemme est évidente.

□

Lorsque $x \notin X$, nous avons que $x \notin \Omega(x)$. Cependant dans cette situation, nous pouvons avoir $\Omega(x) = \emptyset$ aussi bien que $\Omega(x) \neq \emptyset$. La reformulation du problème GNEP en problème d'optimisation est obtenue à l'aide de la fonction de Nikaido-Isoda, définie par la relation suivante :

$$\Psi(x, y) := \sum_{i=1}^N [\theta_i(x^i, x^{-i}) - \theta_i(y^i, x^{-i})]. \quad (3.1)$$

Bien que la fonction de Nikaido-Isoda soit populaire dans la littérature économique, elle a des désavantages d'un point de vue mathématique et pratique. En effet, considérant un vecteur x , le supremum de

$$V(x) = \sup_{y \in \Omega(x)} \Psi(x, y)$$

peut ne pas exister à moins d'ajouter des hypothèses supplémentaires (comme la compacité de X). De plus, ce supremum, s'il existe n'est habituellement pas atteint en un seul point ce qui implique que l'application V et aussi le problème d'optimisation reformulé ne soient pas différentiables en général. Pour faire face à ce type de problème, nous introduisons la fonction de Nikaido-Isoda régularisée.

3.2 Fonction de Nikaido-Isoda régularisée : définition, propriété et reformulation

La fonction de Nikaido-Isoda régularisée de paramètre $\alpha > 0$ est définie par :

$$\Psi_\alpha(x, y) = \sum_{i=1}^N [\theta_i(x^i, x^{-i}) - \theta_i(y^i, x^{-i}) - \frac{\alpha}{2} \|x^i - y^i\|^2]. \quad (3.2)$$

De plus pour $x \in X$, nous définissons

$$\begin{aligned} V_\alpha(x) &:= \max_{y \in \Omega(x)} \Psi_\alpha(x, y). \\ &= \max_{y \in \Omega(x)} \sum_{i=1}^N [\theta_i(x^i, x^{-i}) - \theta_i(y^i, x^{-i}) - \frac{\alpha}{2} \|x^i - y^i\|^2]. \\ &= \sum_{i=1}^N [\theta_i(x^i, x^{-i}) - \min_{y^i \in X_i(x^{-i})} \theta_i(y^i, x^{-i}) - \frac{\alpha}{2} \|x^i - y^i\|^2]. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Théorème 3.2.1. *La fonction régularisée V_α vérifie les propriétés suivantes :*

- (a) $V_\alpha \geq 0$ pour tout $x \in \Omega(x)$.
- (b) x^* est équilibre de Nash généralisé si et seulement si $x^* \in \Omega(x^*)$ et $V_\alpha(x^*) = 0$.

(c) Pour chaque $x \in \Omega(x)$ il existe un vecteur $y_\alpha(x) = (y_\alpha^1(x), \dots, y_\alpha^N(x))$ tel que pour chaque $i = 1, \dots, N$ nous avons

$$\arg \min_{y^i \in X_i(x^{-i})} \left[\theta_i(y^i, x^{-i}) + \frac{\alpha}{2} \|x^i - y^i\|^2 \right] = y_\alpha^i(x).$$

Preuve

(a) Pour $x \in \Omega(x)$ nous avons $V_\alpha(x) = \max_{y \in \Omega(x)} \Psi_\alpha(x, y) \geq \Psi_\alpha(x, x) = 0$.

(b) Supposons que x^* est une solution du problème GNEP. Par définition, nous avons $x^* \in \Omega(x)$ et

$$\theta_i(x^{*i}, x^{*-i}) \leq \theta_i(x^i, x^{*-i}) \quad \forall x^i \in X_i(x^{*i})$$

pour tout $i = 1, \dots, N$. D'où, nous pouvons établir que,

$$\Psi_\alpha(x^*, y) = \sum_{i=1}^N \left[\underbrace{\theta_i(x^{*i}, x^{*-i}) - \theta_i(y^i, x^{*-i})}_{\leq 0 \quad \forall y^i \in X_i(x^{*i})} - \frac{\alpha}{2} \|x^i - y^i\|^2 \right] \leq 0 \quad (3.4)$$

pour tout $y \in \Omega(x^*)$. Ce qui implique

$$V_\alpha(x^*) = \max_{y \in \Omega(x^*)} \Psi_\alpha(x^*, y) \leq 0 \quad (3.5)$$

Or par le point (a) nous avons $V_\alpha(x^*) \geq 0$. Ce qui nous permet de conclure que $V_\alpha(x^*) = 0$.

Réciproquement, supposons que $x^* \in \Omega(x^*)$ et $V_\alpha(x^*) = 0$. Alors $\Psi_\alpha(x^*, y) \leq 0$ est vérifié pour tout $y \in \Omega(x^*)$. Fixons un joueur particulier $i \in \{1, \dots, N\}$ et posons $x^i \in X_i(x^{*-i})$ et $\lambda \in (0, 1)$ arbitraires. Alors définissons un vecteur $y = (y^1, \dots, y^N) \in \mathbb{R}^n$ comme suit :

$$y^\mu = \begin{cases} x^{*\mu} & \text{si } \mu \neq i, \\ \lambda x^{*i} + (1 - \lambda)x^i & \text{si } \mu = i \end{cases}$$

La convexité de l'ensemble $X_i(x^{*-i})$ implique que $y^\mu \in X_\mu(x^{*-i})$ pour tout $i = 1, \dots, N$, c'est-à-dire que $y \in \Omega(x^*)$. Pour cet y particulier, nous obtenons de la convexité de θ_i en x^i , les relation suivantes.

$$\begin{aligned} 0 &\geq \Psi_\alpha(x^*, y) \\ &= \theta_i(x^{*i}, x^{*-i}) - \theta_i(\lambda x^{*i} + (1 - \lambda)x^i, x^{*-i}) - \frac{\alpha}{2}(1 - \lambda)^2 \|x^{*i} - x^i\|^2 \\ &\geq (1 - \lambda)\theta_i(x^{*i}, x^{*-i}) - (1 - \lambda)\theta_i(x^i, x^{*-i}) - \frac{\alpha}{2}(1 - \lambda)^2 \|x^{*i} - x^i\|^2 \end{aligned}$$

En divisant cette inégalité par $1 - \lambda \neq 0$ et en faisant tendre $\lambda \rightarrow -1$ nous avons

$$\theta_i(x^{*i}, x^{*-i}) \leq \theta_i(x^i, x^{*-i}). \quad (3.6)$$

Puisque cela est vérifié pour tout $x^i \in X_i(x^{*-i})$ et tout $i = 1, \dots, N$, il suit que x^* est une solution du problème GNEP.

(c) Le minimum existe et est unique car

$$y^i \mapsto \theta_i(y^i, x^{-i}) + \frac{\alpha}{2} \|x^i - y^i\|^2$$

est fortement convexe pour n'importe quel x donné, et que l'ensemble $X_i(x^{-i})$ est convexe, fermé et non vide.

□

En utilisant les assertions (a) et (b) du théorème, nous voyons que trouver une solution du problème GNEP est équivalent à trouver un minimum global du problème d'optimisation avec contraintes suivant

$$\min V_\alpha(x) \quad \text{tel que } x \in \Omega(x) \quad (3.7)$$

qui peut être reformulé comme suit

$$\min V_\alpha(x) \quad \text{tel que } x \in X$$

en vue du lemme 3.1.1. L'assertion (c) montre l'intérêt de la régularisation.

La proposition suivante nous montre que la définition de l'application V_α peut être utilisée comme une caractérisation d'un point fixe du problème GNEP.

Proposition 3.2.1. *Soit $y_\alpha(x) = (y_\alpha^1(x), \dots, y_\alpha^N(x))$ le vecteur défini au point (c) du Théorème 3.2.1. Alors x^* est une solution du problème GNEP si et seulement si x^* est un point fixe de l'application $x \mapsto y_\alpha(x)$, c'est-à-dire si et seulement si $x^* = y_\alpha(x^*)$.*

Preuve

Supposons que x^* est une solution du problème GNEP. Alors $x^* \in \Omega(x^*)$, ce qui revient par le Lemme 3.1.1 à $x \in X$ et $V_\alpha(x^*) = 0$. Au vu de la définition de $y_\alpha(x^*)$, cela implique

$$0 = V_\alpha(x^*) = \max_{y \in \Omega(x^*)} \Psi_\alpha(x^*, y) = \Psi_\alpha(x^*, y_\alpha(x^*)).$$

Comme $\Psi_\alpha(x^*, x^*) = 0$ et comme $y_\alpha(x^*) = 0$ est l'unique maximum de $\Psi_\alpha(x^*, \cdot)$ sur $\Omega(x^*)$, il suit que $x^* = y_\alpha(x^*)$.

Réciproquement, supposons que x^* est un point fixe de l'application y_α . Alors

$$x^* = y_\alpha(x^*) \in \Omega(x^*),$$

et

$$0 = \Psi_\alpha(x^*, x^*) = \Psi_\alpha(x^*, y_\alpha(x^*)) = V_\alpha(x^*).$$

Ce qui achève la preuve. □

Illustrons maintenant à l'aide d'un exemple le cas où la fonction objectif est non différentiable.

Exemple 3.2.1. *Considérons un problème GNEP à deux joueurs ($N = 2$) basé sur les problèmes d'optimisation suivants.*

• *Joueur 1 :*

$$\begin{aligned} \min_{x_1} \quad & \theta_1(x_1, x_2) := -x_1 \\ \text{tel que} \quad & x_1 + x_2 \leq 1 \\ & 2x_1 + 4x_2 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

• *Joueur 2 :*

$$\begin{aligned} \min_{x_2} \quad & \theta_2(x_1, x_2) := 0 \\ \text{tel que} \quad & x_1 + x_2 \leq 1 \\ & 2x_1 + 4x_2 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Nous avons donc $X = \{(x_1, x_2)^T | x_1 + x_2 \leq 1, 2x_1 + 4x_2 \leq 3, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$

L'ensemble des solutions noté \mathcal{S} est donné par

$$\mathcal{S} = \left\{ x^* = (x_1^*, x_2^*) \left| x_2^* \in \left[0, \frac{3}{4}\right], x_1^* = \begin{cases} 1 - x_2^* & \text{si } x_2^* \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ \frac{3}{2} - 2x_2^* & \text{si } x_2^* \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right] \end{cases} \right. \right\}$$

Calculons $V_\alpha(x)$. Pour ce faire, regardons tout d'abord la fonction de Nikaido-Isoda de ce jeu :

$$\Psi_\alpha(x, y) = -x_1 + y_1 - \frac{\alpha}{2}(x_1 - y_1)^2 - \frac{\alpha}{2}(x_2 - y_2)^2.$$

Ensuite les ensembles $X_1(x^{-1})$ et $X_2(x^{-2})$ sont donnés par :

$$\begin{aligned} X_1(x^{-1}) &= \{ x_1 | x_1 \leq 1 - x_2, x_1 \leq \frac{3}{2} - 2x_2, x_1 \geq 0 \} \\ &= [0, \min \{ 1 - x_2, \frac{3}{2} - 2x_2 \}], \\ X_2(x^{-2}) &= \{ x_2 | x_2 \leq 1 - x_1, x_2 \leq \frac{3}{4} - \frac{1}{2}x_1, x_2 \geq 0 \} \\ &= [0, \min \{ 1 - x_1, \frac{3}{4} - \frac{1}{2}x_1 \}]. \end{aligned}$$

Dès lors,

$$V_\alpha(x) = -x_1 - \min_{y_1 \in X_1(x^{-1})} [-y_1 + \frac{\alpha}{2}(x_1 - y_1)^2] - \min_{y_2 \in X_2(x^{-2})} [\frac{\alpha}{2}(x_2 - y_2)^2]$$

Soit $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. La solution du premier problème d'optimisation est

$$y_\alpha^1(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \frac{1}{\alpha} + x_1 \leq 0 \\ \frac{1}{\alpha} + x_1 & \text{si } \frac{1}{\alpha} + x_1 \in [0, \min \{ 1 - x_2, \frac{3}{2} - 2x_2 \}] \\ \min \{ 1 - x_2, \frac{3}{2} - 2x_2 \} & \text{si } \frac{1}{\alpha} + x_1 \geq \min \{ 1 - x_2, \frac{3}{2} - 2x_2 \} \end{cases}$$

et la solution du second problème est

$$y_\alpha^2(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x_2 \leq 0 \\ x_2 & \text{si } x_2 \in [0, \min \{ 1 - x_1, \frac{3}{4} - \frac{1}{2}x_1 \}] \\ \min \{ 1 - x_1, \frac{3}{4} - \frac{1}{2}x_1 \} & \text{si } x_2 \geq \min \{ 1 - x_1, \frac{3}{4} - \frac{1}{2}x_1 \}. \end{cases}$$

Cependant, puisque nous sommes seulement intéressés à un $x \in X$, on a $x_1 \geq 0$ et donc $\frac{1}{\alpha} + x_1 > 0$, $x_2 \leq 0$ et $x_2 \leq \min \{ 1 - x_1, \frac{3}{4} - \frac{1}{2}x_1 \}$. Alors les formules ci-dessus se simplifient comme suit :

$$y_\alpha^1(x) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha} + x_1 & \text{si } \frac{1}{\alpha} + x_1 \in [0, \min \{ 1 - x_2, \frac{3}{2} - 2x_2 \}] \\ \min \{ 1 - x_2, \frac{3}{2} - 2x_2 \} & \text{si } \frac{1}{\alpha} + x_1 \geq \min \{ 1 - x_2, \frac{3}{2} - 2x_2 \} \end{cases}$$

ce qui revient à

$$y_\alpha^1(x) = \min \{ \frac{1}{\alpha} + x_1, 1 - x_2, \frac{3}{2} - 2x_2 \}$$

et

$$y_\alpha^2(x) = x_2.$$

Il est alors facile de voir que l'application correspondante

$$V_\alpha(x) = -x_1 - \left[-y_\alpha^1(x) + \frac{\alpha}{2}(x_1 - y_\alpha^1(x))^2 \right]$$

n'est pas partout différentiable sur l'ensemble admissible X .

3.3 Reformulation sous forme d'un problème d'optimisation différentiable avec contrainte

Dans ce paragraphe, l'objectif est de reformuler le problème GNEP sous forme d'un problème d'optimisation différentiable. L'idée est de remplacer dans la définition de $V_\alpha(x)$ l'ensemble $\Omega(x)$ par l'ensemble fixe X . Toutefois, cette reformulation ne permettra pas d'obtenir toutes les solutions du problème GNEP, mais uniquement une solution appelée *équilibre de Nash normalisé*. De manière plus formelle, nous avons la définition suivante.

Définition 3.3.1. *Un vecteur $x^* \in X$ est un équilibre de Nash normalisé du problème GNEP, si la relation suivante est vérifiée*

$$\sup_{y \in X} \Psi(x^*, y) \leq 0, \quad (3.8)$$

où Ψ est la fonction de Nikaido-Isoda.

Nous avons qu'un équilibre de Nash normalisé est toujours une solution du problème GNEP, cependant la réciproque n'est pas toujours vérifiée. Le lemme suivant établit une propriété de la fonction de Nikaido-Isoda basée sur la convexité des fonctions objectifs $\theta_i(x) = \theta_i(x^i, x^{-i})$ en x^i .

Lemme 3.3.1. *Soit $x \in X$. La fonction de Nikaido-Isoda $\Psi(x, y)$ est concave en $y \in X$.*

A présent, définissons l'application $\widehat{V}_\alpha(x)$ à l'aide de la fonction de Nikaido-Isoda régularisée en vue d'obtenir une reformulation différentiable du problème GNEP.

$$\begin{aligned} \widehat{V}_\alpha(x) &:= \max_{y \in X} \Psi_\alpha(x, y). \\ &= \max_{y \in X} \sum_{i=1}^N \left[\theta_i(x^i, x^{-i}) - \theta_i(y^i, x^{-i}) - \frac{\alpha}{2} \|x^i - y^i\|^2 \right]. \\ &= \max_{y \in X} \left[\Psi(x, y) - \frac{\alpha}{2} \|x - y\|^2 \right]. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Nous voyons que la seule différence avec la fonction V_α est que le maximum est pris pour tout $y \in X$ au lieu de tout $y \in \Omega(x)$. Ce changement a un nombre important de conséquences. Le théorème suivant en mentionne quelques-unes.

Théorème 3.3.1. *La fonction régularisée \widehat{V}_α vérifie les propriétés suivantes :*

- (a) $\widehat{V}_\alpha(x) \geq 0$ pour tout $x \in X$.
- (b) x^* est un équilibre de Nash normalisé si et seulement si $x^* \in X$ et $\widehat{V}_\alpha(x^*) = 0$.
- (c) Pour chaque $x \in X$ il existe un unique maximiseur $\widehat{y}_\alpha(x)$ tel que nous avons

$$\arg \max_{y \in X} \left[\Psi(x, y) - \frac{\alpha}{2} \|x - y\|^2 \right] = \widehat{y}_\alpha(x)$$

et $\widehat{y}_\alpha(x)$ est continue en x .

Preuve

(a) Soit $x \in X$, nous avons immédiatement que

$$\widehat{V}_\alpha(x) = \max_{y \in X} \Psi_\alpha(x, y) \geq \Psi_\alpha(x, x) = 0$$

(b) Soit x^* un équilibre de Nash normalisé. Alors $x^* \in X$ et $\sup_{y \in X} \Psi(x^*, y) \leq 0$. D'où $\Psi(x^*, y) \leq 0$ pour tout $y \in X$. De plus, nous avons que

$$\begin{aligned} \Psi_\alpha(x^*, y) &= \Psi(x^*, y) - \frac{\alpha}{2} \|x^* - y\|^2 && \text{par définition} \\ &\leq \Psi(x^*, y) \\ &\leq 0 \quad \forall y \in X. \end{aligned}$$

Dès lors, il suit que

$$\widehat{V}_\alpha(x^*) = \max_{y \in K} \Psi_\alpha(x^*, y) \leq 0.$$

Or, par l'assertion (a) nous avons $\widehat{V}_\alpha(x^*) \geq 0$. D'où $\widehat{V}_\alpha(x^*) = 0$.

Réciproquement, soit $x^* \in X$ tel que $\widehat{V}_\alpha(x^*) = 0$. Alors nous avons

$$\Psi_\alpha(x^*, y) \leq 0 \quad \forall y \in X. \tag{3.10}$$

Supposons ensuite qu'il existe un vecteur $\bar{y} \in X$ tel que $\Psi(x^*, \bar{y}) > 0$. Alors

$$\lambda x^* + (1 - \lambda)\bar{y} \in X$$

pour tout $\lambda \in (0, 1)$. De plus, comme $\Psi(x, y)$ est concave, nous avons

$$\begin{aligned} \Psi(x^*, \lambda x^* + (1 - \lambda)\bar{y}) &\geq \lambda \Psi(x^*, x^*) + (1 - \lambda)\Psi(x^*, \bar{y}) \\ &= (1 - \lambda)\Psi(x^*, \bar{y}) > 0 \quad \forall \lambda \in (0, 1). \end{aligned}$$

D'où, nous obtenons

$$\begin{aligned} \Psi_\alpha(x^*, \lambda x^* + (1 - \lambda)\bar{y}) &= \Psi(x^*, \lambda x^* + (1 - \lambda)\bar{y}) - \frac{\alpha}{2} \|x^* - \lambda x^* - (1 - \lambda)\bar{y}\|^2 \\ &= \Psi(x^*, \lambda x^* + (1 - \lambda)\bar{y}) - \frac{\alpha}{2}(1 - \lambda)^2 \|x^* - \bar{y}\|^2 \\ &\geq (1 - \lambda)\Psi(x^*, \bar{y}) - \frac{\alpha}{2}(1 - \lambda)^2 \|x^* - \bar{y}\|^2 > 0 \end{aligned}$$

pour tout $\lambda \in (0, 1)$ suffisamment proche de 1. Mais ceci est en contradiction avec l'inéquation (3.10).

(c) En vertu du Lemme 3.3.1, l'application

$$y \mapsto \Psi(x, y) - \frac{\alpha}{2} \|x - y\|^2$$

est fortement concave. Dès lors, elle admet sur X un maximiseur unique.

□

Ce théorème nous montre que nous pouvons caractériser l'équilibre de Nash normalisé comme un minimum global du problème d'optimisation avec contraintes suivant :

$$\min \widehat{V}_\alpha(x) \quad \text{tel que } x \in X. \quad (3.11)$$

Contrairement à la reformulation de la section précédente, nous n'obtenons pas tous les équilibres du problème de Nash généralisé.

À présent nous énonçons le résultat suivant analogue à la Proposition 3.2.1.

Proposition 3.3.1. *Soit $\widehat{y}_\alpha(x)$ le vecteur défini au point (c) du théorème 3.3.1. Alors x^* est un équilibre de Nash normalisé si et seulement si x^* est un point fixe de l'application $x \mapsto \widehat{y}_\alpha(x)$*

Ensuite, nous montrons que la fonction régularisée \widehat{V}_α est continuellement différentiable lorsque les fonctions objectifs θ_i sont différentiables pour chaque $i = 1, \dots, N$.

Théorème 3.3.2. *La fonction régularisée \widehat{V}_α est continuellement différentiable pour chaque $x \in X$ et son gradient est donné par*

$$\begin{aligned} \nabla \widehat{V}_\alpha(x) = & \sum_{i=1}^N [\nabla \theta_i(x^i, x^{-i}) - \nabla \theta_i(\widehat{y}_\alpha^i(x), x^{-i})] \\ & + \begin{pmatrix} \nabla_{x^1} \theta_1(\widehat{y}_\alpha^1(x), x^{-1}) \\ \vdots \\ \nabla_{x^N} \theta_N(\widehat{y}_\alpha^N(x), x^{-N}) \end{pmatrix} \\ & - \alpha(x - \widehat{y}_\alpha(x)) \end{aligned}$$

où $\widehat{y}_\alpha(x)$ est l'unique maximum du Théorème 3.3.1 associé au vecteur x donné.

Preuve

Comme $\widehat{V}_\alpha(x) = \max_{y \in X} [\Psi(x, y) - \frac{\alpha}{2} \|x - y\|^2]$, et comme l'application $y \mapsto \Psi_\alpha(x, y) =$

$\Psi(x, y) - \frac{\alpha}{2}\|x - y\|^2$, est fortement concave pour tout x . Il suit du théorème de Danskin¹ que \widehat{V}_α est différentiable et que son gradient est donné par

$$\nabla \widehat{V}_\alpha(x) = \nabla_x \Psi_\alpha(x, y)|_{y=\widehat{y}_\alpha(x)}.$$

En effet nous avons que, pour tout $y \in X$,

$$\begin{aligned} \nabla \Psi_\alpha(x, y) &= \nabla \left(\sum_{i=1}^N [\theta_i(x^i, x^{-i}) - \theta_i(y^i, x^{-i}) - \frac{\alpha}{2}\|x - y\|^2] \right) \\ &= \sum_{i=1}^N [\nabla \theta_i(x^i, x^{-i}) - \nabla \theta_i(y^i, x^{-i})] \\ &\quad + \begin{pmatrix} \nabla_{x^1} \theta_1(\widehat{y}_\alpha^1(x^*), x^{-1}) \\ \vdots \\ \nabla_{x^N} \theta_1(\widehat{y}_\alpha^N(x^*), x^{*, -N}) \end{pmatrix} - \alpha(x - y). \end{aligned}$$

Prenant $y = \widehat{y}_\alpha(x)$ nous obtenons alors la formule du gradient de \widehat{V}_α . De plus, puisque les fonctions objectif θ_i sont continuellement différentiables et que $\widehat{y}_\alpha(x)$ est une application continue de x , nous avons que le gradient $\nabla \widehat{V}_\alpha(x)$ est continu. Cela revient à dire que la fonction régularisée V_α est continuellement différentiable. Ce qui achève la preuve.

□

Dans l'optique d'avoir une solution du problème GNEP, nous avons besoin de calculer le minimum global du problème (3.11). Cependant, puisque la plupart des algorithmes trouvent seulement des points stationnaires, nous allons donner des conditions pour qu'un point stationnaire soit aussi un minimum global.

Hypothèse 2. Pour tout $x \in X$ tel que $x \neq \widehat{y}_\alpha(x)$, l'inéquation suivante est vérifiée

$$\sum_{i=1}^N [\nabla \theta_i(x^i, x^{-i}) - \nabla \theta_i(\widehat{y}_\alpha^i(x), x^{-i})]^T (x - \widehat{y}_\alpha(x)) > 0.$$

Théorème 3.3.3. Soit x^* un point stationnaire de (3.11) au sens que

$$\nabla \widehat{V}_\alpha(x^*)^T (x - x^*) \geq 0 \quad \forall x \in X. \quad (3.12)$$

Si l'Hypothèse 2 est vérifiée en $x = x^*$ alors x^* est un équilibre de Nash normalisé.

¹Ce théorème est rappelé en annexe.

Preuve

En utilisant l'expression du gradient $\nabla \hat{V}_\alpha(x^*)$ et (3.12) nous obtenons

$$\begin{aligned}
0 &\leq \nabla \hat{V}_\alpha(x^*)^T (x - x^*) \\
&= \sum_{i=1}^N \left[\nabla \theta_i(x^{*i}, x^{*-i}) - \nabla \theta_i(\hat{y}_\alpha^i(x^*), x^{*-i}) \right]^T (x - x^*) \\
&\quad + \left(\begin{array}{c} \nabla_{x^1} \theta_1(\hat{y}_\alpha^1(x^*), x^{*-1}) \\ \vdots \\ \nabla_{x^N} \theta_N(\hat{y}_\alpha^N(x^*), x^{*-N}) \end{array} \right) (x - x^*) - \alpha(x^* - \hat{y}_\alpha(x^*))(x - x^*) \\
&= \sum_{i=1}^N \left[\nabla \theta_i(x^{*i}, x^{*-i}) - \nabla \theta_i(\hat{y}_\alpha^i(x^*), x^{*-i}) \right]^T (x - x^*) \\
&\quad + \sum_{i=1}^N [\nabla_{x^i} \theta_i(\hat{y}_\alpha^i(x^*), x^{*-i})]^T (x - x^*) - \alpha(x^* - \hat{y}_\alpha(x^*))^T (x - x^*). \\
&= \sum_{i=1}^N \left[\nabla \theta_i(x^{*i}, x^{*-i}) - \nabla \theta_i(\hat{y}_\alpha^i(x^*), x^{*-i}) \right]^T (x - x^*) \\
&\quad + \sum_{i=1}^N [\nabla_{x^i} \theta_i(\hat{y}_\alpha^i(x^*), x^{*-i}) - \alpha(x^* - \hat{y}_\alpha(x^*))]^T (x - x^*).
\end{aligned}$$

En choisissant $x = \hat{y}_\alpha(x^*)$, nous avons alors

$$\begin{aligned}
0 &\leq \sum_{i=1}^N \left[\nabla \theta_i(x^{*i}, x^{*-i}) - \nabla \theta_i(\hat{y}_\alpha^i(x^*), x^{*-i}) \right]^T (\hat{y}_\alpha(x^*) - x^*) \\
&\quad + \sum_{i=1}^N [\nabla_{x^i} \theta_i(\hat{y}_\alpha^i(x^*), x^{*-i}) - \alpha(x^* - \hat{y}_\alpha(x^*))]^T (\hat{y}_\alpha^i(x^*) - x^{*i}) \quad (3.13)
\end{aligned}$$

Or, $\hat{y}_\alpha(x^*)$ est l'unique solution du problème d'optimisation

$$\max_{y \in X} \sum_{i=1}^N [\theta_i(x^{*i}, x^{*-i}) - \theta_i(y^i, x^{*-i}) - \frac{\alpha}{2} \|x^{*i} - y^i\|^2].$$

En conséquence, $\hat{y}_\alpha(x^*)$ satisfait la condition d'optimalité correspondante

$$\left(\begin{array}{c} \nabla_{x^1} \theta_1(\hat{y}_\alpha^1(x^*), x^{*-1}) - \alpha(x^{*,1} - \hat{y}_\alpha^1(x^*)) \\ \vdots \\ \nabla_{x^N} \theta_N(\hat{y}_\alpha^N(x^*), x^{*-N}) - \alpha(x^{*,N} - \hat{y}_\alpha^N(x^*)) \end{array} \right)^T (z - \hat{y}_\alpha(x^*)) \geq 0 \quad \forall z \in X.$$

Pour $z = x^*$, nous obtenons

$$\sum_{i=1}^N [\nabla_{x^i} \theta_i(\hat{y}_\alpha^i(x^*), x^{*-i}) - \alpha(x^{*i} - \hat{y}_\alpha^i(x^*))]^T (x^{*-i} - \hat{y}_\alpha^i(x^*)) \geq 0.$$

La relation (3.13) devient alors

$$\sum_{i=1}^N [\nabla \theta_i(x^{*,i}, x^{*, -i}) - \nabla \theta_i(\hat{y}_\alpha^i(x^*), x^{*, -i})]^T (\hat{y}_\alpha(x^*) - x^*) \geq 0. \quad (3.14)$$

Il suit alors de l'Hypothèse 2 et de la relation (3.14), que $x^* = \hat{y}_\alpha(x^*)$. D'où x^* est un équilibre de Nash normalisé.

□

Remarquons que si nous supposons que l'ensemble $X \subseteq \mathbb{R}^n$ est non vide, convexe, fermé et tel que $X := X_1 \times \cdots \times X_N$. Alors $\Omega(x) = X$ pour tout x , et le problème GNEP se réduit à un problème d'équilibre de Nash. De plus, il suit que

$$\max_{y \in \Omega(x)} \Psi_\alpha(x, y) = \max_{y \in X} \Psi_\alpha(x, y)$$

pour tout $x \in X$. En particulier, l'application V_α définie pour le premier problème est aussi continuellement différentiable quand on l'applique à un problème d'équilibre de Nash.

3.4 Reformulation sous forme d'un problème d'optimisation sans contrainte

Dans cette section, nous allons utiliser la fonction de Nikaido-Isoda régularisée dans le but d'obtenir une reformulation du problème GNEP sous forme d'un problème d'optimisation sans contrainte. A cette fin, nous considérons deux paramètres donnés α et β tel que $0 < \alpha < \beta$ et posons

$$\begin{aligned} \Psi_\alpha(x, y) &= \sum_{i=1}^N \left[\theta_i(x^i, x^{-i}) - \theta_i(y^i, x^{-i}) - \frac{\alpha}{2} \|x^i - y^i\|^2 \right]. \\ \Psi_\beta(x, y) &= \sum_{i=1}^N \left[\theta_i(x^i, x^{-i}) - \theta_i(y^i, x^{-i}) - \frac{\beta}{2} \|x^i - y^i\|^2 \right]. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \hat{V}_\alpha(x) &= \max_{y \in X} \Psi_\alpha(x, y) = \Psi_\alpha(x, \hat{y}_\alpha(x)). \\ \hat{V}_\beta(x) &= \max_{y \in X} \Psi_\beta(x, y) = \Psi_\beta(x, \hat{y}_\beta(x)). \end{aligned}$$

Formellement ces fonctions sont définies seulement pour $x \in X$. Cependant on peut voir qu'elles peuvent être définies pour $x \in \mathbb{R}^n$. De façon similaire à la fonction D -gap qui a été définie à partir de la fonction gap régularisée dans le contexte d'inéquation variationnelle, nous définissons

$$\widehat{V}_{\alpha\beta}(x) = \widehat{V}_\alpha(x) - \widehat{V}_\beta(x) \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (3.15)$$

Pour montrer que cette différence de deux fonctions Nikaido-Isoda donne une reformulation du problème GNEP sous forme d'un problème d'optimisation sans contrainte, nous établissons le résultat suivant.

Lemme 3.4.1. *L'inégalité suivante,*

$$\frac{\beta - \alpha}{2} \|x - \widehat{y}_\beta(x)\|^2 \leq \widehat{V}_{\alpha\beta}(x) \leq \frac{\beta - \alpha}{2} \|x - \widehat{y}_\alpha(x)\|^2 \quad (3.16)$$

est vérifiée pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

Preuve

Soit $x \in \mathbb{R}^n$, par définition nous avons

$$\widehat{V}_\beta(x) = \Psi_\beta(x, \widehat{y}_\beta(x)) = \max_{y \in X} \Psi_\beta(x, y).$$

D'où, puisque $0 < \alpha < \beta$ on a $\widehat{y}_\alpha(x) > \widehat{y}_\beta(x)$, il suit que

$$\widehat{V}_\beta(x) \geq \Psi_\beta(x, \widehat{y}_\alpha(x)). \quad (3.17)$$

Cela qui implique

$$\begin{aligned} \widehat{V}_{\alpha\beta}(x) &= \widehat{V}_\alpha(x) - \widehat{V}_\beta(x). \\ &= \Psi_\alpha(x, \widehat{y}_\alpha(x)) - \Psi_\beta(x, \widehat{y}_\beta(x)). \\ &\leq \Psi_\alpha(x, \widehat{y}_\alpha(x)) - \Psi_\beta(x, \widehat{y}_\alpha(x)). \\ &= \sum_{i=1}^n [\theta_i(x^i, x^{-i}) - \theta_i(\widehat{y}_\alpha^i(x), x^{-i}) - \frac{\alpha}{2} \|x^i - \widehat{y}_\alpha^i(x)\|^2] \\ &\quad - [\theta_i(x^i, x^{-i}) - \theta_i(\widehat{y}_\alpha^i(x), x^{-i}) - \frac{\beta}{2} \|x^i - \widehat{y}_\alpha^i(x)\|^2]. \\ &= \frac{\beta - \alpha}{2} \sum_{i=1}^n \|x^i - \widehat{y}_\alpha^i(x)\|^2. \\ &= \frac{\beta - \alpha}{2} \|x - \widehat{y}_\alpha(x)\|^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

On a donc que l'inégalité de droite vérifiée. Pour l'inégalité de gauche on procède de la même façon en remarquant que

$$\widehat{V}_\alpha(x) \geq \Psi_\alpha(x, \widehat{y}_\beta(x)). \quad (3.18)$$

□

Comme conséquence de ce lemme, nous obtenons le résultat suivant nous donnant les caractéristiques de $\widehat{V}_{\alpha\beta}(x)$.

Théorème 3.4.1. *La fonction $\widehat{V}_{\alpha\beta}(x)$ vérifie les assertions suivantes :*

- (a) $\widehat{V}_{\alpha\beta}(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.
- (b) le vecteur x^* est un équilibre de Nash normalisé si et seulement si x^* est un minimum global de $\widehat{V}_{\alpha\beta}$ avec $\widehat{V}_{\alpha\beta}(x^*) = 0$.

Preuve

(a) En utilisant le Lemme 3.4.1 nous avons,

$$\widehat{V}_{\alpha\beta}(x) \geq \underbrace{\frac{\beta - \alpha}{2}}_{>0 \text{ car } \alpha < \beta} \underbrace{\|x - \widehat{y}_\beta(x)\|^2}_{\geq 0} \geq 0$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

(b) Tout d'abord, supposons que x^* est un équilibre de Nash normalisé. Alors par la proposition (3.3.1) on a que x^* est un point fixe de l'application $x \mapsto \widehat{y}_\alpha(x)$. Cela implique que $x^* = \widehat{y}_\alpha(x)$ et $x^* = \widehat{y}_\beta(x)$. D'où

$$\begin{aligned} \widehat{V}_{\alpha\beta}(x^*) &= \widehat{V}_\alpha(x^*) - \widehat{V}_\beta(x^*) \\ &= \Psi_\alpha(\widehat{y}_\alpha(x^*), \widehat{y}_\alpha(x^*)) - \Psi_\beta(\widehat{y}_\beta(x^*), \widehat{y}_\beta(x^*)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Réciproquement, supposons que x^* est un minimum global tel que $\widehat{V}_{\alpha\beta}(x^*) = 0$

Cela implique $x^* = \widehat{y}_\alpha(x)$ et $x^* = \widehat{y}_\beta(x)$. D'où x^* est une solution du problème GNEP en vue de la proposition 3.3.1.

□

Ce théorème montre que l'équilibre de Nash normalisé est précisément le minimum global du problème d'optimisation sans contrainte

$$\min \widehat{V}_{\alpha\beta}(x) \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (3.19)$$

Notons que ce problème est un problème différentiable. Nous devons cependant supposer que toutes les fonctions objectifs θ_i sont continuellement différentiables. Alors, nous avons le résultat suivant.

Théorème 3.4.2. *La fonction $\widehat{V}_{\alpha\beta}$ est continuellement différentiable pour chaque $x \in \mathbb{R}^n$ et son gradient est donné par*

$$\begin{aligned} \nabla \widehat{V}_{\alpha\beta}(x) &= \sum_{i=1}^N [\nabla \theta_i(\widehat{y}_\beta^i(x), x^{-i}) - \nabla \theta_i(\widehat{y}_\alpha^i(x), x^{-i}) \\ &\quad + \begin{pmatrix} \nabla_{x^1} \theta_1(\widehat{y}_\alpha^1(x), x^{-1}) - \nabla_{x^1} \theta_1(\widehat{y}_\beta^1(x), x^{-1}) \\ \vdots \\ \nabla_{x^N} \theta_N(\widehat{y}_\alpha^N(x), x^{-N}) - \nabla_{x^N} \theta_N(\widehat{y}_\beta^N(x), x^{-N}) \end{pmatrix} \\ &\quad - \alpha(x - \widehat{y}_\alpha(x)) + \beta(x - \widehat{y}_\beta(x)) \end{aligned}$$

Nous savons que (3.19) est une reformulation sans contrainte du problème GNEP. Cependant, nous devons calculer le minimum global de $\widehat{V}_{\alpha\beta}$. Puisque les logiciels standards d'optimisation ne trouvent que des points stationnaires, nous allons donner des conditions pour qu'un tel point stationnaire soit un équilibre de Nash normalisé. Dans ce but, établissons le résultat préliminaire suivant :

Lemme 3.4.2. *L'inégalité suivante est vérifiée*

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^n [\nabla_{x^i} \theta_i(\widehat{y}_\alpha^i(x), x^{-i}) - \nabla_{x^i} \theta_i(\widehat{y}_\beta^i(x), x^{-i}) - \alpha(x^i - \widehat{y}_\alpha^i(x)) + \beta(x^i - \widehat{y}_\beta^i(x))] \\ &\times (\widehat{y}_\beta^i(x) - \widehat{y}_\alpha^i(x)) \geq 0 \end{aligned}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

Et l'hypothèse suivante :

Hypothèse 3. *Pour un $x \in \mathbb{R}^n$ donné avec $\widehat{y}_\alpha(x) \neq \widehat{y}_\beta(x)$, l'inégalité suivante est vérifiée*

$$\sum_{i=1}^N [\nabla \theta_i(\widehat{y}_\beta^i(x), x^{-i}) - \nabla \theta_i(\widehat{y}_\alpha^i(x), x^{-i})]^T (\widehat{y}_\beta(x) - \widehat{y}_\alpha(x)) > 0. \quad (3.20)$$

Ces deux conditions réunies, nous pouvons énoncer et démontrer le théorème nous disant qu'un point stationnaire est automatiquement un minimum global de $\widehat{V}_{\alpha\beta}$.

Théorème 3.4.3. *Soit x^* un point stationnaire de $\widehat{V}_{\alpha\beta}$. Si l'Hypothèse 3 est vérifiée en $x = x^*$. Alors x^* est un équilibre de Nash normalisé.*

Preuve

Puisque x^* est un point stationnaire de $\widehat{V}_{\alpha\beta}$, nous obtenons à l'aide du Théorème 3.4.2 que

$$\begin{aligned}\nabla \widehat{V}_{\alpha\beta}(x^*) &= \sum_{i=1}^N [\nabla \theta_i(\widehat{y}_\beta^i(x^*), x^{*-i}) - \nabla \theta_i(\widehat{y}_\alpha^i(x^*), x^{*-i})] \\ &\quad + \begin{pmatrix} \nabla_{x^1} \theta_1(\widehat{y}_\alpha^1(x^*), x^{*-1}) - \nabla_{x^1} \theta_1(\widehat{y}_\beta^1(x), x^{*-1}) \\ \vdots \\ \nabla_{x^N} \theta_N(\widehat{y}_\alpha^N(x^*), x^{*-N}) - \nabla_{x^N} \theta_N(\widehat{y}_\beta^N(x), x^{*-N}) \end{pmatrix} \\ &\quad - \alpha(x^* - \widehat{y}_\alpha(x^*)) + \beta(x^* - \widehat{y}_\beta(x^*)) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Multiplions cette expression par $(\widehat{y}_\beta(x^*) - \widehat{y}_\alpha(x^*))^T$ nous obtenons

$$\begin{aligned}0 &= \sum_{i=1}^N [\nabla \theta_i(\widehat{y}_\beta^i(x^*), x^{*-i}) - \nabla \theta_i(\widehat{y}_\alpha^i(x^*), x^{*-i})]^T (\widehat{y}_\beta(x^*) - \widehat{y}_\alpha(x^*)) \\ &\quad + \sum_{i=1}^N [\nabla_{x^i} \theta_i(\widehat{y}_\alpha^i(x^*), x^{*-i}) - \nabla_{x^i} \theta_i(\widehat{y}_\beta^i(x), x^{*-i}) \\ &\quad - \alpha(x^{*,i} - \widehat{y}_\alpha^i(x^*)) + \beta(x^{*,i} - \widehat{y}_\beta^i(x^*))]^T (\widehat{y}_\beta(x^*) - \widehat{y}_\alpha(x^*)) \\ &\geq \sum_{i=1}^N [\nabla \theta_i(\widehat{y}_\beta^i(x^*), x^{*-i}) - \nabla \theta_i(\widehat{y}_\alpha^i(x^*), x^{*-i})]^T (\widehat{y}_\beta(x^*) - \widehat{y}_\alpha(x^*)).\end{aligned}$$

La dernière inéquation est obtenue par le Lemme 3.4.2. De plus par l'Hypothèse 3, nous obtenons que $\widehat{y}_\alpha(x^*) = \widehat{y}_\beta(x^*)$. Alors l'expression de $\nabla \widehat{V}_{\alpha\beta}(x^*)$ se réduit à

$$(\beta - \alpha)(x^* - \widehat{y}_\alpha(x^*)) = 0.$$

Puisque $\alpha < \beta$, cela implique que $x^* = \widehat{y}_\alpha(x^*)$. Par conséquent, x^* est un équilibre de Nash normalisé.

□

3.4.1 Algorithme et convergence

Grâce aux résultats que nous venons d'énoncer précédemment, nous pouvons établir l'algorithme suivant et montrer sa convergence globale. Cette algorithme utilise une condition de descente. Si celle-ci n'est pas satisfaite alors la direction retenue est celle de l'opposé du produit et le point suivant est obtenu par une condition d'Armijo classique.

AGLORITHME 1

PAS 0 Choisir $x^0 \in \mathbb{R}^n$, $\omega \in (0, 1)$, $\xi \in (0, 1)$, $\delta \in (0, 1)$, $\sigma \in (0, 1)$ et $\varepsilon \geq 0$.
Poser $k = 0$.

PAS 1 Si $\widehat{V}_{\alpha\beta}(x^k) \leq \varepsilon$ ou $\|\nabla \widehat{V}_{\alpha\beta}(x^k)\| \leq \varepsilon$ STOP.

PAS 2 Choisir un vecteur arbitraire d^k dans \mathbb{R}^n .

Si

$$\widehat{V}_{\alpha\beta}(x^k + d^k) \leq \xi \widehat{V}_{\alpha\beta}(x^k) \quad (3.21)$$

alors $\lambda_k = 1$ et on va au PAS 4. Sinon si d^k ne satisfait pas la condition

$$\langle \nabla \widehat{V}_{\alpha\beta}(x^k), d^k \rangle \leq -\sigma \max \{ \|\nabla \widehat{V}_{\alpha\beta}(x^k)\|^2, \|d^k\|^2 \} \quad (3.22)$$

alors poser $d^k = -\nabla \widehat{V}_{\alpha\beta}(x^k)$.

PAS 3 Trouver le plus petit entier positif ou nul m_k satisfaisant

$$\widehat{V}_{\alpha\beta}(x^k + \omega^{m_k} d^k) - \widehat{V}_{\alpha\beta}(x^k) \leq \delta \omega^{m_k} \langle \nabla \widehat{V}_{\alpha\beta}(x^k), d^k \rangle \quad (3.23)$$

et poser $\lambda_k = \omega^{m_k}$.

PAS 4 Poser $x^{k+1} = x^k + \lambda_k d^k$ et $k = k + 1$. Aller au PAS 1.

A présent, considérons la convergence globale de l'ALGORITHME 1.

Théorème 3.4.4. *Soit $\varepsilon = 0$ et supposons que l'ALGORITHME 1 génère une suite infinie $\{x^k\}$. Soit D un ensemble convexe fermé qui contient une sous-suite $\{x^k\}_{k \in N_0}$ où $N_0 \subseteq N = \{1, 2, \dots\}$. Si $\nabla \widehat{V}_{\alpha\beta}(x)$ est uniformément continue sur D . Alors soit*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \widehat{V}_{\alpha\beta}(x^k) = 0$$

ou

$$\lim_{k \in N_0, k \rightarrow \infty} \nabla \widehat{V}_{\alpha\beta}(x^k) = 0$$

Preuve

Puisque la suite $\{\widehat{V}_{\alpha\beta}(x^k)\}$ est positive ou nulle et décroissante elle converge vers $\widehat{V}_{\alpha\beta}^*$. Nous avons que

— Si $\lim_{k \rightarrow \infty} \widehat{V}_{\alpha\beta}(x^k) = \widehat{V}_{\alpha\beta}^* = 0$.
 \hookrightarrow Le théorème est démontré.

— Si $\lim_{k \rightarrow \infty} \widehat{V}_{\alpha\beta}(x^k) = \widehat{V}_{\alpha\beta}^* > 0$.
 \hookrightarrow Nous montrons, par contradiction, que

$$\lim_{k \in N_0, k \rightarrow \infty} \nabla \widehat{V}_{\alpha\beta}(x^k) = 0$$

Supposons qu'il existe $\varepsilon_1 > 0$ et une sous-suite $\{x^k\}_{k \in N_1}$ où $N_1 \subseteq N_0$ tel que

$$\| \nabla \widehat{V}_{\alpha\beta}(x^k) \| \geq \varepsilon_1 \quad \forall k \in N_1. \quad (3.24)$$

Dans ce cas, d^k satisfait (3.21) seulement pour un nombre fini de k . Sans perdre de généralité, nous pouvons dire que (3.21) n'est pas vérifié pour tout k . Alors, par construction de l'ALGORITHME 1, la condition (3.22) est satisfaite pour tout k .

Sinon

$$\langle \nabla \widehat{V}_{\alpha\beta}(x^k), d^k \rangle > -\sigma \max \{ \|\nabla \widehat{V}_{\alpha\beta}(x^k)\|^2, \|d^k\|^2 \}$$

mais alors $d^k = -\nabla \widehat{V}_{\alpha\beta}(x^k)$

d'où nous avons

$$- \|\nabla \widehat{V}_{\alpha\beta}(x^k)\|^2 > -\sigma \|\nabla \widehat{V}_{\alpha\beta}(x^k)\|^2,$$

ou encore

$$\underbrace{(1 - \sigma)}_{>0} \underbrace{\|\nabla \widehat{V}_{\alpha\beta}(x^k)\|^2}_{\geq \varepsilon^2 > 0} < 0,$$

ce qui est impossible. Il suit alors de (3.24) et (3.22) que

$$\langle \nabla \widehat{V}_{\alpha\beta}(x^k), d^k \rangle \leq -\sigma \varepsilon^2 < 0 \quad \forall k \in N_1. \quad (3.25)$$

Puisque $\{\widehat{V}_{\alpha\beta}(x^k)\}$ est décroissante et positive ou nulle, la règle de recherche linéaire (3.23) implique que

$$\lim_{k \in N_1, k \rightarrow \infty} \lambda_k \langle \nabla \widehat{V}_{\alpha\beta}(x^k), d^k \rangle = 0.$$

Utilisant la relation (3.25) nous pouvons dire que

$$\lim_{k \in N_1, k \rightarrow \infty} \lambda_k = 0. \quad (3.26)$$

De (3.23) et (3.26) nous avons que $\omega^{-1}\lambda_k$ ne vérifie pas l'inéquation (3.23) pour tout $k \in N_1$ suffisamment grand, c'est-à-dire,

$$\widehat{V}_{\alpha\beta}(x^k + \omega^{-1}\lambda_k d^k) - \widehat{V}_{\alpha\beta}(x^k) > \delta \omega^{-1}\lambda_k \langle \nabla \widehat{V}_{\alpha\beta}(x^k), d^k \rangle.$$

Par le théorème des accroissements finis, nous avons

$$\frac{\langle \nabla \widehat{V}_{\alpha\beta}(z^k), d^k \rangle}{\langle \nabla \widehat{V}_{\alpha\beta}(x^k), d^k \rangle} > \delta$$

ou de manière équivalente,

$$\langle \nabla \widehat{V}_{\alpha\beta}(z^k), d^k \rangle > \delta \langle \nabla \widehat{V}_{\alpha\beta}(x^k), d^k \rangle$$

où $z^k = x^k + \theta_k \omega^{-1} \lambda_k d^k$ et $\theta_k \in (0, 1)$. Il suit de cette inéquation que

$$\langle \nabla \widehat{V}_{\alpha\beta}(z^k) - \nabla \widehat{V}_{\alpha\beta}(x^k), d^k \rangle > (\delta - 1) \langle \nabla \widehat{V}_{\alpha\beta}(x^k), d^k \rangle.$$

Utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on déduit que

$$\langle \nabla \widehat{V}_{\alpha\beta}(z^k) - \nabla \widehat{V}_{\alpha\beta}(x^k), d^k \rangle \leq \| \nabla \widehat{V}_{\alpha\beta}(z^k) - \nabla \widehat{V}_{\alpha\beta}(x^k) \| \| d^k \|$$

ou encore que

$$\begin{aligned} \| \nabla \widehat{V}_{\alpha\beta}(z^k) - \nabla \widehat{V}_{\alpha\beta}(x^k) \| &\geq \frac{1}{\| d^k \|} \langle \nabla \widehat{V}_{\alpha\beta}(z^k) - \nabla \widehat{V}_{\alpha\beta}(x^k), d^k \rangle. \\ &> \frac{\delta - 1}{\| d^k \|} \langle \nabla \widehat{V}_{\alpha\beta}(x^k), d^k \rangle. \end{aligned} \quad (3.27)$$

De plus, de (3.22) et (3.23), nous avons aussi

$$\begin{aligned} \widehat{V}_{\alpha\beta}(x^k) - \widehat{V}_{\alpha\beta}(x^{k+1}) &\geq \delta \sigma \max\{\lambda_k \| \nabla \widehat{V}_{\alpha\beta}(x^k) \|^2, \lambda_k \| d^k \|\}. \\ &\geq \delta \sigma \lambda_k \| d^k \|^2. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Puisque $\{\widehat{V}_{\alpha\beta}(x^k)\}$ est positive ou nulle et décroît de façon montone, de (3.28) et (3.26) nous avons

$$\lim_{k \in N_1, k \rightarrow \infty} \lambda_k d^k = 0.$$

Cela qui implique que

$$\lim_{k \in N_1, k \rightarrow \infty} \| z^k - x^k \| = 0. \quad (3.29)$$

Nous pouvons en déduire, par hypothèse et par la relation (3.29), que

$$\lim_{k \in N_1, k \rightarrow \infty} \| \nabla \widehat{V}_{\alpha\beta}(z^k) - \nabla \widehat{V}_{\alpha\beta}(x^k) \| = 0. \quad (3.30)$$

D'autre part, de (3.24), (3.22) et (3.27), nous avons

$$\begin{aligned} \| \nabla \widehat{V}_{\alpha\beta}(z^k) - \nabla \widehat{V}_{\alpha\beta}(x^k) \| &\geq (1 - \delta) \sigma \max\left\{ \frac{\| \nabla \widehat{V}_{\alpha\beta}(x^k) \|^2}{\| d^k \|}, \| d^k \| \right\}. \\ &\geq (1 - \delta) \sigma \max\left\{ \frac{\varepsilon_1^2}{\| d^k \|}, \| d^k \| \right\}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

De (3.30) et (3.31), nous avons

$$\lim_{k \in N_1, k \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon_1^2}{\| d^k \|} = 0 \quad \lim_{k \in N_1, k \rightarrow \infty} \| d^k \| = 0.$$

Or, au vu de ces deux égalités, nous avons bien une contradiction. Ce qui achève la preuve. \square

Chapitre 4

Méthode de descente avec recherche linéaire

Dans ce chapitre, nous présentons une méthode de descente qui utilise une recherche linéaire inexacte de type Armijo. Dans un premier temps, nous mettons en place les différents outils utilisés. Dans un second temps, nous explicitons les hypothèses et exposons certains résultats obtenus suite à ces hypothèses. Finalement, nous présentons la méthode de descente utilisée et l'écrivons de manière formelle sous forme d'un algorithme et démontrons que ce dernier est bien défini ainsi que sa convergence.

4.1 Hypothèses et définitions

Tout au long de ce chapitre, nous faisons les hypothèses suivantes communément présentes dans le contexte du problème GNEP.

Hypothèse 4. 1. *L'ensemble $X \subseteq \mathbb{R}^n$ est non vide, fermé et convexe.*

2. *Les fonctions objectifs $\theta_i(\cdot, x^i)$ sont continues et convexes.*

La méthode de descente présentée dans ce chapitre trouve un équilibre de Nash normalisé et donc une solution particulière d'un problème de Nash généralisé donné. Cette méthode est appliquée au problème GNEP reformulé, à l'aide de la fonction de Nikaido-Isoda régularisée, sous forme d'un problème d'optimisation différentiable avec contrainte. Rappelons succinctement les différents outils que nous utiliserons dans ce chapitre. Le problème de maximisation auquel nous nous intéressons se définit comme suit

$$\begin{aligned} \max_y \quad & \Psi_\alpha(x, y) \\ \text{tel que} \quad & y \in X \end{aligned}$$

et a une solution unique pour chaque x que nous appelons $\hat{y}_\alpha(x)$, c'est-à-dire

$$\hat{y}_\alpha(x) = \arg \max_{y \in X} \Psi_\alpha(x, y).$$

De plus, la fonction de mérite (la fonction de valeur correspondante) est alors définie par

$$\widehat{V}_\alpha(x) := \Psi_\alpha(x, \widehat{y}_\alpha(x)).$$

Ces applications ont un nombre important de propriétés que nous avons abordées dans le Chapitre 3. Néanmoins, établissons les propriétés supplémentaires sur la convexité de la fonction \widehat{V}_α . Avant tout, donnons quelques définitions.

Définition 4.1.1. *La fonction $\Psi_\alpha(\cdot, y)$ est dite fortement convexe de module $\mu > 0$ sur un ensemble convexe $S \subseteq \mathbb{R}^n$ quelque soit y si l'inégalité*

$$\Psi_\alpha(\lambda x + (1 - \lambda)z, y) \leq \Psi_\alpha(x, y) + (1 - \lambda)\Psi_\alpha(z, y) - \mu\lambda(1 - \lambda)\|x - z\|^2$$

est vérifiée pour tout $x, z \in S$ et tout $\lambda \in (0, 1)$.

Si la constante $\mu > 0$ peut être choisie indépendamment de $y \in S$, alors nous avons que $\Psi_\alpha(\cdot, y)$ est uniformément fortement convexe sur S .

En utilisant la définition ci-dessus, nous avons la proposition suivante.

Proposition 4.1.1. *Les résultats suivants sont vérifiés.*

1. *Si $\Psi_\alpha(\cdot, y)$ est convexe pour chaque $y \in X$, alors \widehat{V}_α est aussi convexe sur X .*
2. *Si $\Psi_\alpha(\cdot, y)$ est uniformément fortement convexe sur X , alors \widehat{V}_α est fortement convexe sur X .*

Preuve

1. Utilisons la convexité de $\Psi_\alpha(\cdot, y)$. Nous obtenons pour chaque $x, z \in X$ et tout $\lambda \in (0, 1)$

$$\begin{aligned} & \widehat{V}_\alpha(\lambda x + (1 - \lambda)z) \\ &= \Psi_\alpha(\lambda x + (1 - \lambda)z, \widehat{y}_\alpha(\lambda x + (1 - \lambda)z)). \\ &\leq \lambda\Psi_\alpha(x, \widehat{y}_\alpha(\lambda x + (1 - \lambda)z)) + (1 - \lambda)\Psi_\alpha(z, \widehat{y}_\alpha(\lambda x + (1 - \lambda)z)). \\ &\leq \lambda\Psi_\alpha(x, \widehat{y}_\alpha(x)) + (1 - \lambda)\Psi_\alpha(z, \widehat{y}_\alpha(z)). \\ &= \lambda\widehat{V}_\alpha(x) + (1 - \lambda)\widehat{V}_\alpha(z). \end{aligned}$$

où la première inégalité est obtenue par définition de la convexité de $\Psi_\alpha(\cdot, y)$ et en tenant compte que le vecteur $\widehat{y}_\alpha(\lambda x + (1 - \lambda)z)$ appartient à X . La seconde inégalité est, quant à elle, obtenue en utilisant les définitions de $\widehat{y}_\alpha(x)$ et de $\widehat{y}_\alpha(z)$. Nous avons donc que \widehat{V}_α est convexe.

2. Soit $\mu > 0$ le module de la convexité forte de $\Psi_\alpha(\cdot, y)$ sur l'ensemble X . Alors nous obtenons pour tout $x, z \in X$ et tout $\lambda \in (0, 1)$ que

$$\begin{aligned}
& \widehat{V}_\alpha(\lambda x + (1 - \lambda)z) \\
&= \Psi_\alpha(\lambda x + (1 - \lambda)z, \widehat{y}_\alpha(\lambda x + (1 - \lambda)z)). \\
&\leq \lambda \Psi_\alpha(x, \widehat{y}_\alpha(\lambda x + (1 - \lambda)z)) + (1 - \lambda) \Psi_\alpha(z, \widehat{y}_\alpha(\lambda x + (1 - \lambda)z)) - \mu \lambda (1 - \lambda) \|x - z\|^2. \\
&\leq \lambda \Psi_\alpha(x, \widehat{y}_\alpha(x)) + (1 - \lambda) \Psi_\alpha(z, \widehat{y}_\alpha(z)) - \mu \lambda (1 - \lambda) \|x - z\|^2. \\
&= \lambda \widehat{V}_\alpha(x) + (1 - \lambda) \widehat{V}_\alpha(z) - \mu \lambda (1 - \lambda) \|x - z\|^2.
\end{aligned}$$

D'où, V_α est fortement convexe de module $\mu > 0$ sur X .

□

La proposition suivante établit la condition suffisante pour garantir la convexité (forte) de \widehat{V}_α pour le cas de fonctions de coût quadratiques.

Proposition 4.1.2. *Considérons le cas où les fonctions de coût sont quadratiques, c'est-à-dire,*

$$\theta_i(x) = \frac{1}{2}(x^i)^T A_{ii} x^i + \sum_{\substack{\mu=1 \\ \mu \neq i}}^N (x^i)^T A_{i\mu} x^\mu, \quad \forall i = 1, \dots, N,$$

pour des matrices $A_{i\mu} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_\mu}$ telles que les blocs diagonaux de A_{ii} sont, sans perdre de généralité, symétrique. Supposons que

$$B := \begin{pmatrix} \frac{1}{2}A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1N} \\ A_{21} & \frac{1}{2}A_{22} & \cdots & A_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{N1} & A_{N2} & \cdots & \frac{1}{2}A_{NN} \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

est définie positive et posons $\lambda_{\min} > 0$ comme étant la plus petite valeur propre de la matrice symétrique $B + B^T$. Alors nous avons les résultats suivants :

1. La fonction \widehat{V}_α est convexe sur \mathbb{R}^n pour tout $\alpha \in (0, \lambda_{\min}]$.
2. La fonction \widehat{V}_α est fortement convexe sur \mathbb{R}^n pour tout $\alpha \in (0, \lambda_{\min})$.

Preuve

Montrons que $\Psi_\alpha(\cdot, y)$ est (uniformément fortement) convexe. Pour ce faire, calculons $\nabla_{x^i x^\mu}^2 \Psi_\alpha(x, y)$. Nous obtenons que

$$\nabla_{x^i x^\mu}^2 \Psi_\alpha(x, y) = \begin{cases} A_{i\mu} + A_{\mu i}^T & \text{si } i \neq \mu \\ A_{ii} - \alpha I_{n_i} & \text{si } i = \mu \end{cases}$$

pour tout $i, \mu = 1, \dots, N$. D'où, nous avons que

$$\nabla_{xx}^2 \Psi_\alpha(x, y) = B + B^T - \alpha I.$$

Par conséquent, le hessien $\nabla_{xx}^2 \Psi_\alpha(x, y)$ est semi-défini positif (défini positif) pour tout $\alpha \in (0, \lambda_{\min}]$ (pour tout $\alpha \in (0, \lambda_{\min})$, respectivement). Ce qui implique que la fonction $\Psi_\alpha(\cdot, y)$ est convexe (uniformément fortement convexe). Dès lors, par la Proposition 4.1.1, nous avons que \hat{V}_α est convexe (fortement convexe) sur \mathbb{R}^n . Ce qui achève la preuve

□

Ce résultat est valable si on ajoute des termes constants ou linéaires supplémentaires puisque cela ne change pas la dérivée seconde de Ψ_α . A présent, regardons un exemple montrant que les bornes données dans la Proposition 4.1.2 sont précises.

Exemple 4.1.1. *Considérons le problème d'équilibre de Nash où le joueur 1 contrôle la variable x_1 et le joueur 2 contrôle la variable x_2 , et ayant les problèmes d'optimisation suivants.*

• *Joueur 1 :*

$$\begin{aligned} \min_{x_1} \quad & \theta_1(x_1, x_2) := \frac{1}{2}x_1^2 \\ \text{tel que} \quad & x_1 \geq 1 \end{aligned}$$

• *Joueur 2 :*

$$\begin{aligned} \min_{x_2} \quad & \theta_2(x_1, x_2) := \frac{1}{2}x_2^2 \\ \text{tel que} \quad & x_2 \geq 1 \end{aligned}$$

La solution de ce problème est $x^* = (1, 1)^T$. La matrice $B + B^T$ est donnée par

$$B + B^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres sont $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, d'où nous avons que $\lambda_{\min} = 1$. Nous avons alors pour $\Psi_\alpha(x, y)$, l'expression suivante :

$$\Psi_\alpha(x, y) = \frac{1}{2}x_1^2 - \frac{1}{2}y_1^2 - \frac{\alpha}{2}(x_1 - y_1)^2 + \frac{1}{2}x_2^2 - \frac{1}{2}y_2^2 - \frac{\alpha}{2}(x_2 - y_2)^2.$$

Pour un $\alpha > 0$ arbitraire, regardons l'expression de $\hat{y}_\alpha(x) = \arg \max_{y \in X} \Psi_\alpha(x, y)$, nous avons

$$[\hat{y}_\alpha(x)]_i = \begin{cases} \frac{\alpha}{1+\alpha} x_i & \text{si } x_i \geq \frac{1+\alpha}{\alpha} \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Dès lors, pour tout x satisfaisant $x_i \geq \frac{1+\alpha}{\alpha}$, nous avons localement que

$$\hat{y}_\alpha(x) \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Par conséquent, le hessien de \hat{V}_α sous cette condition est donné par

$$\nabla^2 \hat{V}_\alpha(x) = \begin{pmatrix} 1-\alpha & 0 \\ 0 & 1-\alpha \end{pmatrix}$$

ce qui implique que \hat{V}_α est convexe pour tout α tel que $0 < \alpha \leq 1$ et non convexe pour tout $\alpha > 1$.

4.2 Hypothèse de différentiabilité et conditions de satisfaction

Dans cette section, nous discutons de l'hypothèse suivante rencontrée dans le Chapitre 3 sur la fonction de Nikaido-Isoda.

Hypothèse 5. 1. Les fonctions objectifs θ_i sont continuellement différentiables.

2. Pour chaque $x \in X$ avec $x \neq \hat{y}_\alpha(x)$, l'inégalité

$$\sum_{i=1}^N \left[\nabla \theta_i(x^i, x^{-i}) - \nabla \theta_i(\hat{y}_\alpha^i(x), x^{-i}) \right]^T (x - \hat{y}_\alpha(x)) > 0$$

est vérifiée.

Comme nous le verrons par la suite, cette hypothèse ne garantit pas que \hat{V}_α est convexe, mais implique, entre autre, qu'un point stationnaire de V_α est un minimum global de \hat{V}_α sur X . A présent, regardons sous quelles conditions l'Hypothèse 5 est satisfaite.

Théorème 4.2.1. Soit x^* un équilibre de Nash normalisé du GNEP, et supposons que les fonctions objectifs θ_i sont deux fois continuellement différentiables. Supposons que la matrice $A = (A_{\mu,i})_{\mu,i=1}^N$ avec $A_{\mu,i} = \nabla_{x^i x^\mu}^2 \theta_i(x^*)$ est définie positive. Alors il existe un voisinage $N(x^*)$ sur lequel l'Hypothèse 5 est vérifiée.

Preuve

Afin de simplifier la notation, nous écrivons respectivement y et y^i au lieu de $\widehat{y}_\alpha(x)$ et $\widehat{y}_\alpha^i(x)$. Par le théorème des accroissements finis nous avons que

$$\nabla\theta_i(y^i, x^{-i}) - \nabla\theta_i(x^i, x^{-i}) = \left(\int_0^1 \nabla_{xx^i}^2 \theta_i(x^i + \tau(y^i - x^i), x^{-i}) d\tau \right) (y^i - x^i)$$

D'où, nous avons

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N [\nabla\theta_i(x^i, x^{-i}) - \nabla\theta_i(y^i, x^{-i})] \\ &= \sum_{i=1}^N \left[\left(\int_0^1 \nabla_{xx^i}^2 \theta_i(x^i + \tau(y^i - x^i), x^{-i}) d\tau \right) (x^i - y^i) \right] \\ &= \left(\int_0^1 \nabla_{xx^1}^2 \theta_1(x^1 + \tau(y^1 - x^1), x^{-1}) d\tau, \right. \\ & \quad \left. \dots, \int_0^1 \nabla_{xx^N}^2 \theta_N(x^N + \tau(y^N - x^N), x^{-N}) d\tau \right) (x - y) \\ &= \left(\int_0^1 [\nabla_{xx^1}^2 \theta_1(x^1 + \tau(y^1 - x^1), x^{-1}), \right. \\ & \quad \left. \dots, \nabla_{xx^N}^2 \theta_N(x^N + \tau(y^N - x^N), x^{-N})] d\tau \right) (x - y) \\ &= \int_0^1 [\nabla_{xx^1}^2 \theta_1(x^1 + \tau(y^1 - x^1), x^{-1}), \dots, \nabla_{xx^N}^2 \theta_N(x^N + \tau(y^N - x^N), x^{-N})] \\ & \quad \times (x - y) d\tau \end{aligned}$$

Puisque les fonctions θ_i sont deux fois différentiables, et puisque x^* est un point fixe de $\widehat{y}_\alpha(\cdot)$, l'hypothèse que A est définie positive implique qu'il existe un voisinage $N(x^*)$ tel que la matrice suivante,

$$(\nabla_{xx^1}^2 \theta_1(x^1 + \tau(y^1 - x^1), x^{-1}), \dots, \nabla_{xx^N}^2 \theta_N(x^N + \tau(y^N - x^N), x^{-N}))$$

est définie positive pour tout $x \in N(x^*)$ et $\tau \in [0, 1]$. Cela implique que l'Hypothèse 5 est vérifiée pour tout $x \in N(x^*)$ avec $x \neq y$.

□

Les deux corollaires suivants sont des conséquences du Théorème 4.2.1 et fournissent des conditions suffisantes pour que l'Hypothèse 5 soit satisfaite.

Corollaire 4.2.1. *Considérons le cas où les fonctions objectifs θ_i sont quadratiques et données par*

$$\theta_i(x) = \frac{1}{2}(x^i)^T A_{ii} x^i + \sum_{\substack{\mu=1 \\ \mu \neq i}}^N (x^i)^T A_{i\mu} x^\mu$$

pour $i = 1, \dots, N$. Supposons que la matrice $A = (A_{i\mu})_{\mu,i=1}^N$ est définie positive. Alors l'Hypothèse 5 est satisfaite en un point arbitraire $x \in \mathbb{R}^n$ avec $x \neq \hat{y}_\alpha(x)$.

Preuve

Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Alors

$$\nabla_{x^\mu} \theta_i(x^i, x^{-i}) = A_{i\mu}^T x^i \quad \forall i \neq \mu$$

et

$$\nabla_{x^i} \theta_i(x^i, x^{-i}) = A_{ii} x^i + \sum_{\substack{\mu=1 \\ \mu \neq i}}^N A_{i\mu} x^\mu = \sum_{\mu=1}^N A_{i\mu} x^\mu.$$

Par conséquent, nous obtenons

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N [\nabla \theta_i(x^i, x^{-i}) - \nabla \theta_i(\hat{y}_\alpha^i(x), x^{-i})]^T (x - \hat{y}_\alpha(x)) \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{\mu=1}^N [\nabla_{x^\mu} \theta_i(x^i, x^{-i}) - \nabla_{x^\mu} \theta_i(\hat{y}_\alpha^i(x), x^{-i})]^T (x^\mu - \hat{y}_\alpha^\mu(x)) \\ &= \sum_{\mu,i=1}^N (x^i - \hat{y}_\alpha^i(x))^T A_{i\mu} (x^\mu - \hat{y}_\alpha^\mu(x)) \\ &= (x - \hat{y}_\alpha(x))^T A (x - \hat{y}_\alpha(x)) > 0 \end{aligned}$$

quelque soit $x \neq \hat{y}_\alpha(x)$. D'où l'Hypothèse 5 est vérifiée. Ce qui achève la preuve. □

Imposer que la matrice $A = (A_{i\mu})$ soit définie positive est plus faible que la même condition sur la matrice B définie par la relation (4.1). Cela s'explique par le fait que si la matrice B est définie positive alors la matrice diagonale $D := \frac{1}{2} \text{diag}(A_{11}, \dots, A_{NN})$ est aussi définie positive. Dès lors, A est aussi définie positive puisque la matrice A est la somme de B et D .

Corollaire 4.2.2. *Supposons que θ_i soit deux fois continuellement différentiable et que la matrice $B(x, y) = (B_{\mu i}(x, y))_{i,\mu=1}^N$ avec*

$$B_{\mu i}(x, y) = \nabla_{x^\mu}^2 \theta_i(y^i, x^{-i}) \quad (4.2)$$

est définie positive pour tout $x, y \in X$ ou de manière équivalente supposons que les matrices

$$B(x, y) = -\nabla_{xy}^2 \Psi_\alpha(x, y) - \nabla_{yy}^2 \Psi_\alpha(x, y)$$

sont définies positives pour tout $x, y \in X$. Alors, l'Hypothèse 5 est vérifiée pour tout $x \in X$ avec $x \neq \hat{y}_\alpha(x)$.

Preuve

Par le Théorème 4.2.1, nous voyons que supposer que $B(x, y)$ est définie positive implique que l'Hypothèse 5 est vérifiée. Il nous reste donc à voir que $B_{\mu i}(x, y) = \nabla_{x^\mu x^i}^2 \theta_i(y^i, x^{-i})$ est équivalent à $B(x, y) = -\nabla_{xy}^2 \Psi_\alpha(x, y) - \nabla_{yy}^2 \Psi_\alpha(x, y)$. Pour ce faire, calculons les expressions de $\nabla_{xy}^2 \Psi_\alpha(x, y)$ et $\nabla_{yy}^2 \Psi_\alpha(x, y)$. D'une part, nous avons que $\nabla_x \Psi_\alpha(x, y)$ est donnée par

$$\nabla_x \Psi_\alpha(x, y) = \begin{pmatrix} \nabla_1 \theta_1(x^1, x^{-1}) - \nabla_1 \theta_2(y^2, x^{-2}) - \dots - \nabla_1 \theta_N(y^N, x^{-N}) \\ \vdots \end{pmatrix}$$

D'où, nous avons

$$\nabla_{xy}^2 \Psi_\alpha(x, y) = \begin{pmatrix} 0 - \nabla_{12} \theta_2(y^2, x^{-2}) - \dots - \nabla_{1N} \theta_N(y^N, x^{-N}) \\ \vdots \end{pmatrix}$$

D'autre part, nous avons que $\nabla_y \Psi_\alpha(x, y)$ est donnée par

$$\nabla_y \Psi_\alpha(x, y) = \begin{pmatrix} -\nabla_1 \theta_1(y^1, x^{-1}) \\ \vdots \end{pmatrix}$$

D'où, nous avons

$$\nabla_{yy}^2 \Psi_\alpha(x, y) = \begin{pmatrix} -\nabla_{11} \theta_1(y^1, x^{-1}) 0 \dots 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Donc nous pouvons en conclure que

$$-\nabla_{xy}^2 \Psi_\alpha(x, y) - \nabla_{yy}^2 \Psi_\alpha(x, y) = \begin{pmatrix} \nabla_{11} \theta_1(y^1, x^{-1}) + \nabla_{12} \theta_2(y^2, x^{-2}) + \dots + \nabla_{1N} \theta_N(y^N, x^{-N}) \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Ce qui achève la preuve.

□

L'exemple suivant montre que la condition donnée par (4.2) n'est pas suffisante pour la convexité de la fonction \hat{V}_α . En particulier, il suit de l'Hypothèse 5 que les points stationnaires sont des minima globaux pour une classe de problèmes non convexes.

Exemple 4.2.1. *Considérons un jeu avec deux joueurs ($N=2$), où chaque joueur contrôle une variable et dont les problèmes d'optimisation sont les suivants.*

• *Joueur 1 :*

$$\begin{array}{ll} \min_{x_1} & \theta_1(x_1, x_2) := \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{3}{4}x_1x_2 \\ \text{tel que} & x_1 \leq 1 \end{array}$$

• *Joueur 2 :*

$$\begin{array}{ll} \min_{x_2} & \theta_2(x_1, x_2) := \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{3}{4}x_1x_2 \\ \text{tel que} & x_2 \leq 1 \end{array}$$

L'unique équilibre de Nash est $x^ = (1, 1)^T$. Nous avons alors pour $\Psi_\alpha(x, y)$, l'expression suivante :*

$$\begin{aligned} \Psi_\alpha(x, y) = & \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{3}{4}x_1x_2 - \frac{1}{2}y_1^2 + \frac{3}{4}y_1x_2 - \frac{\alpha}{2}(x_1 - y_1)^2 \\ & + \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{3}{4}x_1x_2 - \frac{1}{2}y_2^2 + \frac{3}{4}x_1y_2 - \frac{\alpha}{2}(x_2 - y_2)^2. \end{aligned}$$

A présent, regardons l'expression de $\hat{y}_\alpha(x) = \arg \max_{y \in X} \Psi_\alpha(x, y)$ dont les composantes sont notées y_1 et y_2 :

$$\begin{cases} y_1 = \frac{1}{1+\alpha} \frac{3}{4}x_2 \\ y_2 = \frac{1}{1+\alpha} \frac{3}{4}x_1 \end{cases}$$

Dès lors, pour $x \in X := [1, \infty) \times [1, \infty)$ suffisamment près de x^ , nous avons $\hat{y}_\alpha(x) \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et donc,*

$$\nabla^2 \hat{V}_\alpha(x) = \begin{pmatrix} 1 - \alpha & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 1 - \alpha \end{pmatrix}.$$

De manière évidente, il n'y a pas de $\alpha > 0$ tel que la matrice soit définie positive. Cependant, la matrice $B(x, y)$ donnée par la relation (4.2) est égale à

$$B(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & 1 \end{pmatrix}$$

et donc est définie positive pour tout $\alpha \in (0, \infty)$ et tout $x, y \in X$, ce qui implique que l'Hyptohèse 5 est vérifiée pour tout $x \in X$.

4.3 Algorithme et convergence

La méthode de relaxation la plus simple utilise l'itération

$$x^{k+1} := x^k + t_k d^k, \quad d^k := \hat{y}_\alpha(x^k) - x^k \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.3)$$

pour une valeur particulière du paramètre $\alpha > 0$ et une longueur de pas $t_k \in (0, 1]$ satisfaisant les conditions suivantes

$$t_k \downarrow 0 \quad \sum_{k=0}^{\infty} t_k = \infty.$$

Ces conditions suggèrent un choix de la forme $t_k = \gamma/k$ pour une constante $\gamma > 0$. Cependant, en pratique, ce choix mène à une convergence très lente. Dès lors, nous utilisons une recherche linéaire inexacte de type Armijo pour calculer une longueur de pas t_k efficace à chaque itération k afin d'améliorer le comportement numérique de la méthode de relaxation. Établissons formellement l'algorithme.

ALGORITHME 2 (Méthode de descente avec recherche linéaire inexacte)

PAS 1 Choisir $x^0 \in X$, $\beta, \sigma \in (0, 1)$ et poser $k = 0$.

PAS 2 Utiliser un critère d'arrêt (par exemple $\hat{V}_\alpha(x^k) \leq \epsilon$ pour $\epsilon > 0$).

PAS 3 Calculer $\hat{y}_\alpha(x^k)$ et poser $d^k = \hat{y}_\alpha(x^k) - x^k$.

PAS 4 Calculer $t_k = \max\{\beta^l | l = 0, 1, 2, \dots\}$ tel que

$$\hat{V}_\alpha(x^k + t_k d^k) \leq \hat{V}_\alpha(x^k) - \sigma t_k^2 \|d^k\|. \quad (4.4)$$

Pas 5 Poser $x^{k+1} = x^k + t_k d^k$, $k = k + 1$ et aller au PAS 2.

Montrons que l'ALGORITHME 2 est bien défini. Pour cela, commençons par remarquer que d^k est toujours une direction de descente pour la fonction \hat{V}_α .

Lemme 4.3.1. *Soit $x^k \in X$ et d^k le vecteur calculé au Pas 3 de l'ALGORITHME 2. Alors, $\nabla \hat{V}_\alpha(x^k)^T d^k < 0$, c'est-à-dire que d^k est une direction de descente en x^k (aussi longtemps que x^k n'est pas un équilibre de Nash normalisé).*

Preuve

Pour simplifier les notations, nous écrivons \hat{y}_α au lieu de $\hat{y}_\alpha(x)$ et omettons l'indice k

désignant l'itération. Calculons $\nabla \widehat{V}_\alpha(x)^T d$, nous obtenons

$$\begin{aligned} \nabla \widehat{V}_\alpha(x)^T d &= \left(\sum_{i=1}^N [\nabla \theta_i(x^i, x^{-i}) - \nabla \theta_i(\widehat{y}_\alpha^i, x^{-i})] + \begin{pmatrix} \nabla_{x^1} \theta_1(\widehat{y}_\alpha^1, x^{-1}) \\ \vdots \\ \nabla_{x^N} \theta_N(\widehat{y}_\alpha^N, x^{-N}) \end{pmatrix} - \alpha(x - \widehat{y}_\alpha(x)) \right)^T \\ &\quad \times (\widehat{y}_\alpha - x) \\ &= \left(\sum_{i=1}^N [\nabla \theta_i(x^i, x^{-i}) - \nabla \theta_i(\widehat{y}_\alpha^i, x^{-i})] \right)^T (\widehat{y}_\alpha - x) \\ &\quad + \left(\begin{pmatrix} \nabla_{x^1} \theta_1(\widehat{y}_\alpha^1, x^{-1}) \\ \vdots \\ \nabla_{x^N} \theta_N(\widehat{y}_\alpha^N, x^{-N}) \end{pmatrix} - \alpha(x - \widehat{y}_\alpha) \right)^T (\widehat{y}_\alpha - x) \end{aligned}$$

Le premier terme du membre de droite de l'égalité est négatif par l'Hypothèse 5. Le second terme du membre de droite, quant à lui, est négatif par la condition d'optimalité du premier ordre pour $\widehat{y}_\alpha(x) := \arg \max_{y \in X} \Psi_\alpha(x, y)$. Dès lors, nous pouvons conclure que $\nabla \widehat{V}_\alpha(x)^T d < 0$, d'où d est une direction de descente.

□

Nous pouvons, à présent, montrer que l'ALGORITHME 2 est bien défini.

Lemme 4.3.2. *L'ALGORITHME 2 est bien défini et génère une suite $\{x^k\}$ appartenant à l'ensemble admissible X .*

Preuve

Le point de départ x^0 a été choisi de façon que $x^0 \in X$. De plus, si $x^k \in X$, nous avons aussi

$$x^{k+1} = x^k + t_k d^k = (1 - t_k)x^k + t_k \widehat{y}_\alpha(x^k) \in X,$$

puisque $x^k, \widehat{y}_\alpha(x^k) \in X$, $t_k \in (0, 1]$ et X est convexe par hypothèse. Dès lors, nous avons que la suite $\{x^k\}$ appartient à X . Vérifions ensuite que la boucle dans le PAS 4 est finie à chaque itération k . A cette fin, fixons le nombre d'itération à k et supposons que le calcul de t_k est une boucle infinie. Alors, nous avons

$$\widehat{V}_\alpha(x^k + \beta^l d^k) > \widehat{V}_\alpha(x^k) - \sigma \beta^{2l} \|d^k\|, \quad \forall l \in \mathbb{N}$$

ou, de manière équivalente,

$$\frac{\widehat{V}_\alpha(x^k + \beta^l d^k) - \widehat{V}_\alpha(x^k)}{\beta^l} > -\sigma \beta^l \|d^k\|, \quad \forall l \in \mathbb{N}$$

Prenons la limite quand l tend vers $+\infty$ et utilisons le fait que \widehat{V}_α est continuellement différentiable, nous obtenons

$$\nabla \widehat{V}_\alpha(x^k)^T d^k \geq 0.$$

D'autre part, nous savons par le Lemme 4.3.1 que $\nabla \widehat{V}_\alpha(x^k)^T d^k < 0$ puisque x^k n'est pas une solution du GNEP car sinon l'algorithme devrait se terminer au PAS 1. Nous avons donc une contradiction. Ce qui achève la preuve. \square

Donnons à présent le résultat qui établit la convergence globale de l'ALGORITHME 2.

Théorème 4.3.1. *Chaque point d'accumulation d'une suite générée par l'ALGORITHME 2 est un équilibre de Nash normalisé.*

Preuve

Soit x^* un point d'accumulation et soit une sous-suite $\{x^k\}_K$ convergant vers x^* . Par hypothèse, l'application $x \mapsto \widehat{y}_\alpha(x)$ est continue ce qui entraîne que $\{\widehat{y}_\alpha(x^k)\}_K \rightarrow \widehat{y}_\alpha(x^*)$. D'où, nous avons $\{d^k\}_K \rightarrow \widehat{y}_\alpha(x^*) - x^* := d^*$. Dès lors nous devons montrer que $d^* = 0$.

Travaillons par contradiction, supposons que nous avons $d^* \neq 0$.

Par construction, nous avons que la suite entière $\{\widehat{V}_\alpha(x^k)\}$ est décroissante et bornée inférieurement. Il suit que la suite entière $\{\widehat{V}_\alpha(x^k)\}$ converge. Par la règle de recherche linéaire, nous avons

$$0 \leftarrow \widehat{V}_\alpha(x^{k+1}) - \widehat{V}_\alpha(x^k) \leq -\sigma t_k^2 \|d^k\| \leq 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Cela implique

$$\lim_{k \rightarrow \infty} t_k^2 \|d^k\| = 0.$$

Puisque par hypothèse nous avons $d^* \neq 0$, nous obtenons

$$\lim_{k \in K} t_k = 0. \tag{4.5}$$

Posons $l_k \in \mathbb{N}$ comme étant l'unique exposant tel que $t_k = \beta^{l_k}$ dans le Pas 4 de l'ALGORITHME 2. Par la relation (4.5), nous pouvons donc supposer sans perdre de généralité que $t_k < 1$ pour tout $k \in K$. Dès lors la longueur de pas $\frac{t_k}{\beta} = \beta^{l_k-1}$ ne satisfait pas l'inégalité (4.4) de l'ALGORITHME 2. D'où, nous avons

$$\widehat{V}_\alpha(x^k + \beta^{l_k-1} d^k) > \widehat{V}_\alpha(x^k) - \sigma(\beta^{l_k-1})^2 \|d^k\|, \quad \forall k \in K.$$

Ce qui peut être réécrit comme

$$\frac{\widehat{V}_\alpha(x^k + \beta^{l_k-1} d^k) - \widehat{V}_\alpha(x^k)}{\beta^{l_k-1}} > -\sigma(\beta^{l_k-1}) \|d^k\|, \quad \forall k \in K.$$

Passons à la limite quand k tend vers l'infini sur K . Sachant que $\beta^{l_k-1} \rightarrow 0$ et que \widehat{V}_α est continuellement différentiable, nous obtenons par le théorème des accroissements finis que

$$\nabla \widehat{V}_\alpha(x^*)^T d^* \geq 0.$$

Or, nous avons que

$$d^* = \widehat{y}_\alpha(x^*) - x^* \neq 0.$$

Il suit du Lemme 4.3.1 que $\nabla \widehat{V}_\alpha(x^*)^T d^* < 0$. Cette contradiction montre que $d^* = 0$, et, donc, que x^* est un équilibre de Nash normalisé du GNEP.

□

Remarquons que si nous remplaçons la règle de recherche linéaire (4.4) dans l'ALGORITHME 2 par la condition suivante

$$\widehat{V}_\alpha(x^k + t_k d^k) \leq \widehat{V}_\alpha(x^k) - \sigma t_k^2 \|d^k\|^2,$$

où la seule différence avec la condition (4.4) est que nous prenons le carré de $\|d^k\|$ plutôt que simplement $\|d^k\|$. Nous avons que le résultat de convergence précédent est vérifié. L'exemple suivant met en évidence la vitesse de convergence de l'itération x^{k+1} de l'ALGORITHME 2.

Exemple 4.3.1. *Considérons le GNEP suivant, qui s'avère être un simple problème de Nash sans contrainte. De plus, dans ce problème, nous considérons deux joueurs ($N = 2$), où chaque joueur contrôle une variable et dont les problèmes d'optimisation sont les suivants.*

• *Joueur 1 :*

$$\begin{aligned} \min_{x_1} \quad & \theta_1(x_1, x_2) := \frac{1}{2}x_1^2 \\ \text{tel que} \quad & (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

• *Joueur 2 :*

$$\begin{aligned} \min_{x_2} \quad & \theta_2(x_1, x_2) := \frac{1}{2}x_2^2 \\ \text{tel que} \quad & (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

La solution de ce problème est l'origine $x^* = (0, 0)^T$. Nous avons alors pour $\Psi_\alpha(x, y)$, l'expression suivante :

$$\Psi_\alpha(x, y) = \frac{1}{2}x_1^2 - \frac{1}{2}y_1^2 - \frac{\alpha}{2}(x_1 - y_1)^2 + \frac{1}{2}x_2^2 - \frac{1}{2}y_2^2 - \frac{\alpha}{2}(x_2 - y_2)^2.$$

Soit donné $x \in \mathbb{R}^2$, nous avons alors que $\hat{y}_\alpha(x)$ est donné par

$$\hat{y}_\alpha(x) = \frac{\alpha}{1 + \alpha} x.$$

Par conséquent, pour une longueur de pas $t_k = 1$ dans la méthode de descente avec recherche linéaire, nous obtenons

$$x^{k+1} = x^k + t_k d^k = \hat{y}_\alpha(x^k) = \frac{\alpha}{1 + \alpha} x^k.$$

Clairement, cela montre que la vitesse de convergence n'est pas quadratique ni superlinéaire. D'autre part, cet exemple montre que nous avons une vitesse de convergence linéaire plus rapide pour de petits $\alpha > 0$.

Chapitre 5

Méthode de projections

Dans ce chapitre, nous allons dans un premier temps reformuler notre problème d'équilibre de Nash généralisé sous forme d'une inéquation quasi-variationnelle. Ensuite, nous allons établir quelques définitions et propriétés sur les projections. Dans un second temps, nous présentons des algorithmes faisant appel à des projections. Pour finir, nous montrons la convergence de ces algorithmes et les implémentons sur trois exemples.

5.1 Formulation du problème GNEP sous un problème QVIP

Supposons que les fonctions objectifs $\theta_i(\cdot, x^{-i})$ soient convexes et continûment différentiables dans \mathbb{R}^{n_i} . De plus, chaque sous-ensemble $X_i(x^{-i})$ est fermé et convexe pour chaque $i = 1, \dots, N$. Définissons une fonction $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ et l'application $\Omega : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ par

$$\begin{aligned} F(x) &:= (F_i(x))_{i=1}^N := (\nabla_{x^i} \theta_i(x^i, x^{-i}))_{i=1}^N \in \mathbb{R}^n \\ \Omega(x) &:= \prod_{i=1}^N X_i(x^{-i}) \subseteq \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

Dès lors, x^{*i} est un équilibre de Nash généralisé si et seulement si x^{*i} est un point stationnaire de la fonction $\theta_i(\cdot, x^{-i})$ sur l'ensemble $X_i(x^{*-i})$, c'est-à-dire, qui satisfait

$$x^{*-i} \in X_i(x^{*-i})$$

et

$$\langle \nabla_{x^i} \theta_i(x^{*i}, x^{*-i}), x^i - x^{*i} \rangle \geq 0, \quad \forall x^i \in X_i(x^{*-i}).$$

Nous avons alors la définition plus formelle suivante.

Définition 5.1.1. *Le problème d'équilibre de Nash généralisé consiste à trouver un vecteur $x^* \in \mathbb{R}^n$ tel que $x^* \in \Omega(x^*)$ et*

$$\langle F(x^*), y - x^* \rangle \geq 0, \quad \forall y \in \Omega(x^*). \quad (5.1)$$

Ce type de problème (5.1) est un exemple de problème d'inéquation quasi-variationnelle (noté QVIP). En particulier, si $\Omega(x) = X$ pour tout x , où X est un ensemble non vide fermé et convexe alors le problème d'inéquation quasi-variationnelle (5.1) se réduit à un problème d'inéquation variationnelle.

Tout au long de ce chapitre, nous faisons les hypothèses suivantes.

Hypothèse 6. 1. $F(\cdot)$ est monotone (ou pseudo-monotone) sur X ,
2. $S^* := \{x \in S \mid \langle F(x), y - x \rangle \geq 0, \forall y \in \bar{S}\} \neq \emptyset$, où $S = \bigcap_{x \in X} \Omega(x)$ et $\bar{S} = \bigcup_{x \in X} \Omega(x)$,
3. $\Omega(\cdot)$ est continue sur X .

Remarquons qu'il n'est pas facile de tester en pratique le point 2 de l'Hypothèse 6. Mais il donne une condition suffisante pour garantir que l'ensemble de solutions du problème QVIP (5.1) est non vide. Lorsque pour tout $x \in X$, $\Omega(x) = \Omega$, c'est-à-dire, $\Omega(x)$ est un ensemble constant, le problème QVIP se réduit à un problème d'inéquation variationnelle classique. Dans ce cas, le point 2 de l'Hypothèse 6 revient à dire que l'ensemble de solutions du problème d'inéquation variationnelle est non vide. Ainsi, dans un certain sens, le point 2 est une généralisation de la caractérisation de l'ensemble de solutions d'un problème d'inéquation variationnelle à un problème d'inéquation quasi-variationnelle.

5.2 Propriétés des projections

Pour un ensemble convexe fermé et non vide Ω dans \mathbb{R}^n , la projection de \mathbb{R}^n sur Ω est définie par

$$P_\Omega(x) = \operatorname{argmin}\{\|x - y\| \mid y \in \Omega\}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Nous avons alors les propriétés suivantes.

Lemme 5.2.1. Soit un sous-ensemble convexe, fermé et non vide de \mathbb{R}^n . Alors un vecteur $\omega \in \Omega$ est la projection du vecteur x sur Ω si et seulement si

$$\langle \omega - x, z - \omega \rangle \geq 0, \quad \text{pour tout } z \in \Omega.$$

De plus, P_Ω est non expansif, c'est-à-dire, pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$\|P_\Omega(x) - P_\Omega(y)\| \leq \|x - y\|.$$

Soit M un opérateur de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^n . Soit $x \in \mathbb{R}^n$ et $\alpha > 0$, définissons

$$x(\alpha) = P_\Omega(x - \alpha M(x)) \quad \text{et} \quad e(x, \alpha) = x - x(\alpha).$$

Lemme 5.2.2. *Les relations suivantes :*

1. $\|x - x(\alpha)\|$ est croissante en $\alpha > 0$,
2. $\frac{\|x - x(\alpha)\|}{\alpha}$ est décroissante en $\alpha > 0$.

sont vérifiées.

Preuve

Considérons deux constantes α et β telles que $\beta > \alpha > 0$.

Si $\|e(x, \alpha)\| = 0$, alors $\|e(x, \beta)\| = 0$. Les deux résultats sont alors vérifiés.

Maintenant, supposons que $\|e(x, \alpha)\| \neq 0$ et posons

$$t = \frac{\|e(x, \beta)\|}{\|e(x, \alpha)\|}.$$

Nous devons alors montrer que $1 \leq t \leq \frac{\beta}{\alpha}$, ce qui est équivalent à l'expression suivante

$$(t - 1)(t - \frac{\beta}{\alpha}) \leq 0. \quad (5.2)$$

Par le Lemme 5.2.1, nous avons

$$\langle v - P_{\Omega}(v), P_{\Omega}(v) - w \rangle \geq 0 \quad \forall w \in \Omega. \quad (5.3)$$

Substituons

$$\begin{aligned} w &:= P_{\Omega}(x - \beta M(x)). \\ v &:= x - \alpha M(x). \end{aligned}$$

dans la relation (5.3). Nous avons

$$\langle x - \alpha M(x) - P_{\Omega}(x - \alpha M(x)), P_{\Omega}(x - \alpha M(x)) - P_{\Omega}(x - \beta M(x)) \rangle \geq 0. \quad (5.4)$$

Remarquons à présent que

$$\begin{aligned} P_{\Omega}(x - \alpha M(x)) - P_{\Omega}(x - \beta M(x)) &= x - e(x, \alpha) - x + e(x, \beta) \\ &= e(x, \beta) - e(x, \alpha). \end{aligned}$$

La relation (5.4) peut alors s'écrire de la manière suivante

$$\langle e(x, \alpha) - \alpha M(x), e(x, \beta) - e(x, \alpha) \rangle \geq 0. \quad (5.5)$$

De manière similaire, nous avons

$$\langle \beta M(x) - e(x, \beta), e(x, \beta) - e(x, \alpha) \rangle \geq 0. \quad (5.6)$$

Multiplions (5.5) par β , (5.6) par α et additionnons les deux expressions résultantes, nous obtenons

$$\langle \beta e(x, \alpha) - \alpha e(x, \beta), e(x, \beta) - e(x, \alpha) \rangle \geq 0. \quad (5.7)$$

Ce qui revient à,

$$\langle \beta e(x, \alpha), e(x, \beta) \rangle - \beta \|e(x, \alpha)\|^2 - \alpha \|e(x, \beta)\|^2 + \alpha \langle e(x, \beta), e(x, \alpha) \rangle \geq 0.$$

Par conséquent, nous avons

$$\beta \|e(x, \alpha)\|^2 + \alpha \|e(x, \beta)\|^2 \leq (\alpha + \beta) \langle e(x, \alpha), e(x, \beta) \rangle. \quad (5.8)$$

Divisons (5.8) par $\|e(x, \alpha)\|^2$, nous obtenons

$$\beta + \alpha t^2 \leq (\alpha + \beta) \frac{\|e(x, \beta)\| \|e(x, \alpha)\|}{\|e(x, \alpha)\|^2} = (\alpha + \beta)t.$$

Ce qui revient à

$$\alpha t^2 - \alpha t - \beta t + \beta \leq 0.$$

Nous avons donc que la relation (5.2) est vérifiée. Ce qui achève la preuve.

□

De ce lemme, nous pouvons conclure le lemme suivant.

Lemme 5.2.3. *Soit M une application continue de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^n . Pour tous $x \in \mathbb{R}^n$ et $\alpha > 0$, nous avons*

$$\min\{1, \alpha\} \|e(x, 1)\| \leq \|e(x, \alpha)\| \leq \max\{1, \alpha\} \|e(x, 1)\|.$$

Le lemme suivant nous donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'un vecteur x^* soit solution du problème d'inéquation quasi-variationnelle (5.1).

Lemme 5.2.4. *Un point x^* est une solution du problème d'inéquation quasi-variationnelle (5.1) si et seulement si*

$$r_{\Omega(x^*)}(x^*) = \|x^* - P_{\Omega(x^*)}(x^* - F(x^*))\| = 0.$$

5.3 Algorithmes

Dans cette section, nous établissons deux algorithmes basés sur les méthodes de projections. Ces algorithmes utilisent le critère d'arrêt

$$r_{\Omega(x_k)}(x_k) = \|x_k - P_{\Omega(x_k)}(x_k - F(\bar{x}_k))\| = 0.$$

Enonçons le premier algorithme.

ALGORITHME 3

PAS 1 Soient des constantes $\gamma > 0$, $l \in (0, 1)$, $\mu \in (0, 1)$ et $\rho \in (0, 2)$. Prendre $x_{-1} \in X$. Choisir arbitrairement un $x_0 \in \Omega(x_{-1})$. Poser $k = 0$.

PAS 2 Si $r_{\Omega(x_k)}(x_k) = 0$ alors STOP. Sinon poser

$$\bar{x}_k = P_{\Omega(x_k)}(x_k - \alpha_k F(x_k)),$$

où $\alpha_k = \gamma l^{m_k}$ et m_k est le plus petit entier positif ou nul tel que

$$\alpha_k \langle F(x_k) - F(\bar{x}_k), x_k - \bar{x}_k \rangle \leq \mu \|x_k - \bar{x}_k\|^2. \quad (5.9)$$

PAS 3 Poser

$$x_{k+1} = P_{\Omega(x_k)}(x_k - \beta_k(x_k - \bar{x}_k + \alpha_k F(\bar{x}_k))),$$

où β_k est donné par

$$\beta_k = \rho(1 - \mu) \frac{\|x_k - \bar{x}_k\|^2}{\|x_k - \bar{x}_k + \alpha_k F(\bar{x}_k)\|^2}.$$

PAS 4 Poser $k = k + 1$ et aller au PAS 2.

Nous voyons que cet algorithme utilise deux projections par itération. De plus, nous utilisons la projection $P_{\Omega(x_k)}$ formée par le point x_k à l'itération k , plutôt qu'une projection fixe P_Ω . Le nouveau point x_{k+1} produit est alors dans $\Omega(x_k)$, tandis que x_k n'est pas nécessairement dans $\Omega(x_k)$. Cela va rendre la preuve de convergence de l'algorithme plus compliquée puisque certains résultats de projections ne pourront pas être utilisés. Vérifions à l'aide des Lemmes (5.3.1) et (5.3.2) que l'ALGORITHME 3 est bien défini.

Lemme 5.3.1. *Soit $x \in X$. Définissons $x_{\Omega(x)}(\alpha) = P_{\Omega(x)}(x - \alpha F(x))$. Alors pour une constante $\mu \in (0, 1)$ nous avons*

$$\alpha \langle F(x) - F(x_{\Omega(x)}(\alpha)), x - x_{\Omega(x)}(\alpha) \rangle \leq \mu \|x - x_{\Omega(x)}(\alpha)\|^2 \quad (5.10)$$

lorsque $\alpha > 0$ est suffisamment petit.

Preuve

Nous avons par définition,

$$x_{\Omega(x)}(\alpha) = P_{\Omega(x)}(x - \alpha F(x)).$$

Or, ce terme tend vers $P_{\Omega(x)}(x)$ quand $\alpha \rightarrow 0$. Si il existe un $\tilde{\alpha} > 0$ tel que $x = x_{\Omega(x)}(\tilde{\alpha})$ alors par le premier résultat du Lemme (5.2.1), nous avons que $x = x_{\Omega(x)}(\alpha)$ pour tout $\alpha > 0$. Dans ce cas nous avons

$$\underbrace{\alpha \langle F(x_{\Omega(x)}) - F(x_{\Omega(x)}), x_{\Omega(x)} - x_{\Omega(x)} \rangle}_{=0} \leq \mu \underbrace{\|x_{\Omega(x)} - x_{\Omega(x)}\|}_{=0}.$$

La relation (5.10) est donc vérifiée pour tout $\alpha > 0$.

Maintenant, dans le cas où $x \neq x_{\Omega(x)}(\alpha)$ pour tout $\alpha > 0$, nous allons prouver que la relation (5.10) est vérifiée pour tout $\alpha > 0$ suffisamment petit par contradiction.

Si la conclusion n'est pas vérifiée, alors il existe une suite positive $\{\alpha_i\}$ ($i = 1, 2, \dots$) qui tend vers zéro tel que pour tout α_i ,

$$\alpha_i \langle F(x) - F(x_{\Omega(x)}(\alpha_i)), x - x_{\Omega(x)}(\alpha_i) \rangle > \mu \|x - x_{\Omega(x)}(\alpha_i)\|^2.$$

En utilisant l'inéquation ci-dessus et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous avons

$$\alpha_i \|F(x) - F(x_{\Omega(x)}(\alpha_i))\| \|x - x_{\Omega(x)}(\alpha_i)\| > \mu \|x - x_{\Omega(x)}(\alpha_i)\|^2,$$

ce qui revient, après simplification, à

$$\alpha_i \|F(x) - F(x_{\Omega(x)}(\alpha_i))\| > \mu \|x - x_{\Omega(x)}(\alpha_i)\|. \quad (5.11)$$

Considérons deux cas.

1. x n'appartient pas à $\Omega(x)$

Dans ce cas, le terme

$$\alpha_i \|F(x) - F(x_{\Omega(x)}(\alpha_i))\|$$

devrait tendre vers zéro tandis que $\mu \|x - x_{\Omega(x)}(\alpha_i)\|$ devrait tendre vers un nombre positif quand $\alpha_i \rightarrow 0$. Ce qui contredit la relation (5.11).

2. x appartient à $\Omega(x)$

Dans ce cas, nous avons que $x = P_{\Omega(x)}(x)$. Puisque F est continue et $x_{\Omega(x)}(\alpha_i) \rightarrow P_{\Omega(x)}(x) = x$ quand $\alpha_i \rightarrow 0$, le terme $\|F(x) - F(x_{\Omega(x)}(\alpha_i))\|$ devrait tendre vers zéro. D'après le résultat du Lemme (5.11), le terme $\frac{\|x - x_{\Omega(x)}(\alpha_i)\|}{\alpha_i}$ n'est pas plus petit que le nombre positif $\|x - x_{\Omega(x)}(1)\|$. Ce qui contredit la relation (5.11).

□

Lemme 5.3.2. *Si $r_{\Omega(x_k)}(x_k) \neq 0$, alors*

$$\|x_k - \bar{x}_k + \alpha_k F(\bar{x}_k)\| \neq 0 \quad (5.12)$$

Preuve

Soit x^* un élément de l'ensemble S^* . Alors par définition de S^* et le fait que $x_k \in \Omega(x_{k-1})$ et que $\bar{x}_k \in \Omega(x_k)$, nous avons

$$\langle F(x^*), x_k - x^* \rangle \geq 0,$$

et

$$\langle F(x^*), \bar{x}_k - x^* \rangle \geq 0.$$

Par ces deux inégalités et par la monotonie (pseudo-monotonie) de F sur X , nous avons

$$\langle F(x_k), x_k - x^* \rangle \geq 0, \quad (5.13)$$

et

$$\langle F(\bar{x}_k), \bar{x}_k - x^* \rangle \geq 0. \quad (5.14)$$

Puisque $\bar{x}_k = P_{\Omega(x_k)}(x_k - \alpha_k F(x_k))$, par la définition de projection d'un vecteur et le fait que $x^* \in \Omega(x_k)$, nous avons

$$\langle \bar{x}_k - x_k + \alpha_k F(x_k), x^* - \bar{x}_k \rangle \geq 0,$$

ou encore,

$$\langle x_k - \alpha_k F(x_k) - \bar{x}_k, \bar{x}_k - x^* \rangle \geq 0. \quad (5.15)$$

Donc, nous obtenons que

$$\begin{aligned} & \langle x_k + \alpha_k F(\bar{x}_k) - \bar{x}_k, x_k - x^* \rangle \\ &= \langle x_k - \bar{x}_k, x_k - x^* \rangle + \alpha_k \langle F(\bar{x}_k), x_k - x^* \rangle \\ &= \langle x_k - \bar{x}_k - \alpha_k F(x_k) + \alpha_k F(x_k), x_k - x^* \rangle + \alpha_k \langle F(\bar{x}_k), x_k - \bar{x}_k + \bar{x}_k - x^* \rangle \\ &= \langle x_k - \bar{x}_k - \alpha_k F(x_k), x_k - x^* \rangle + \alpha_k \underbrace{\langle F(x_k), x_k - x^* \rangle}_{\geq 0 \text{ par la relation (5.13)}} + \alpha_k \langle F(\bar{x}_k), x_k - \bar{x}_k \rangle \\ & \quad + \alpha_k \underbrace{\langle F(\bar{x}_k), \bar{x}_k - x^* \rangle}_{\geq 0 \text{ par la relation (5.14)}} \\ &\geq \langle x_k - \bar{x}_k - \alpha_k F(x_k), x_k - x^* \rangle + \alpha_k \langle F(\bar{x}_k), x_k - \bar{x}_k \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \langle x_k - \bar{x}_k - \alpha_k F(x_k), x_k - \bar{x}_k + \bar{x}_k - x^* \rangle + \alpha_k \langle F(\bar{x}_k), x_k - \bar{x}_k \rangle \\
&= \langle x_k - \bar{x}_k - \alpha_k F(x_k), x_k - \bar{x}_k \rangle + \underbrace{\langle x_k - \bar{x}_k - \alpha_k F(x_k), \bar{x}_k - x^* \rangle}_{\geq 0 \text{ par la relation (5.15)}} \\
&\quad + \alpha_k \langle F(\bar{x}_k), x_k - \bar{x}_k \rangle \\
&\geq \langle x_k - \bar{x}_k - \alpha_k F(x_k), x_k - \bar{x}_k \rangle + \alpha_k \langle F(\bar{x}_k), x_k - \bar{x}_k \rangle \\
&= \langle x_k - \bar{x}_k - \alpha_k F(x_k) + \alpha_k F(\bar{x}_k), x_k - \bar{x}_k \rangle \\
&= \langle x_k - \bar{x}_k - \alpha_k (F(x_k) - F(\bar{x}_k)), x_k - \bar{x}_k \rangle \\
&= \|x_k - \bar{x}_k\|^2 - \alpha_k \langle F(x_k) - F(\bar{x}_k), x_k - \bar{x}_k \rangle \\
&\geq (1 - \mu) \|x_k - \bar{x}_k\|^2 \text{ par la relation (5.9)}
\end{aligned}$$

Si $r_{\Omega(x_k)}(x_k) \neq 0$, nous avons $x_k \neq \bar{x}_k$. En effet, supposons que $x_k = \bar{x}_k$ ce qui revient à écrire que

$$x_k = P_{\Omega(x_k)}(x_k - \alpha_k F(x_k)).$$

En utilisant le premier résultat du Lemme 5.2.1, nous avons

$$\langle x_k - x_k + \alpha_k F(x_k), z - x_k \rangle \geq 0 \quad \forall z \in \Omega(x_k).$$

Par simplification et le fait que la constante α_k est positive, nous obtenons

$$\langle F(x_k), z - x_k \rangle \geq 0 \quad \forall z \in \Omega(x_k).$$

Dès lors, nous avons

$$\langle x_k - x_k + F(x_k), z - x_k \rangle \geq 0 \quad \forall z \in \Omega(x_k).$$

Cette dernière inéquation signifie que $x_k = P_{\Omega(x_k)}(x_k - F(x_k))$, ce qui est impossible car nous avons supposé que $r_{K(x_k)}(x_k) = P_{\Omega(x_k)}(x_k - F(x_k)) \neq 0$. Nous avons donc bien que $x_k \neq \bar{x}_k$. La relation

$$\langle x_k + \alpha_k F(\bar{x}_k) - \bar{x}_k, x_k - x^* \rangle \geq (1 - \mu) \|x_k - \bar{x}_k\|^2 \quad (5.16)$$

nous permet de conclure que $x_k + \alpha_k F(\bar{x}_k) - \bar{x}_k \neq 0$. Ce qui achève la preuve.

□

Nous avons donc dans un premier temps un algorithme qui requiert une recherche linéaire d'Armijo et demande une projection à chaque point itéré jusqu'à la fin du pas. Cependant, cela nécessite parfois des calculs coûteux. Pour remédier à ce défaut, nous donnons un algorithme dans lequel seulement deux projections sont calculées à chaque itération.

ALGORITHME 4

PAS 1 Soient des constantes $\rho \in (0, 2)$, $l \in (0, 1)$, et $\mu \in (0, 1)$. Choisir $x_0 \in X$. Poser $k = 0$.

PAS 2 Si $r_{\Omega(x_k)}(x_k) = 0$ alors STOP. Sinon poser

$$\begin{aligned} z_k &= P_{\Omega(x_k)}(x_k - F(x_k)), \\ y_k &= (1 - \alpha_k)x_k + \alpha_k z_k, \end{aligned}$$

où $\alpha_k = l^{m_k}$ et m_k est le plus petit entier positif ou nul tel que

$$\langle F(x_k) - F((1 - l^m)x_k + l^m z_k), x_k - z_k \rangle \leq \mu \|x_k - z_k\|^2. \quad (5.17)$$

PAS 3 Poser

$$x_{k+1} = P_{\Omega(x_k)}(x_k - \beta_k d_k),$$

où β_k et d_k sont données par

$$\beta_k = \rho(1 - \mu) \frac{\|x_k - z_k\|^2}{\|d_k\|^2}$$

et

$$d_k = x_k - z_k + \frac{F(y_k)}{\alpha_k}$$

respectivement.

PAS 4 Poser $k = k + 1$ et aller au PAS 2.

Pour cet algorithme, nous faisons l'hypothèse supplémentaire suivante.

Hypothèse 7. Pour tout $x \in X$, nous avons $x \in \Omega(x)$.

A présent, vérifions que l'ALGORITHME 4 est bien défini.

Lemme 5.3.3. Soit $x \in X$ arbitraire. Pour tout $\alpha \in (0, 1)$, définissons

$$z = P_{\Omega(x)}(x - F(x)), \quad y(\alpha) = (1 - \alpha)x + \alpha z.$$

Alors pour tout μ donné tel que $\mu \in (0, 1)$, nous avons

$$\langle F(x) - F(y(\alpha)), x - z \rangle \leq \mu \|x - z\|^2$$

lorsque $\alpha > 0$ est suffisamment petit.

Ce lemme nous montre que le Pas 2 est bien défini.

Lemme 5.3.4. *Supposons que les Hypothèses 6 et 7 soient vérifiées. Si $r_{\Omega(x_k)}(x_k) \neq 0$ alors*

$$d_k \neq 0$$

Preuve

Soit x^* un élément de l'ensemble S^* . Alors par définition de S^* et le fait que $x_k \in \Omega(x_k)$ et que $y_k \in \Omega(y_k)$, nous avons

$$\langle F(x^*), x_k - x^* \rangle \geq 0,$$

et

$$\langle F(x^*), y_k - x^* \rangle \geq 0.$$

Par ces deux inégalités et par la monotonie de F sur X , nous avons

$$\langle F(x_k), x_k - x^* \rangle \geq 0, \tag{5.18}$$

et

$$\langle F(y_k), y_k - x^* \rangle \geq 0. \tag{5.19}$$

Puisque $z_k = P_{\Omega(x_k)}(x_k - F(x_k))$, par la définition de projection d'un vecteur et le fait que $x^* \in \Omega(x_k)$, nous avons

$$\langle z_k - x_k + F(x_k), x^* - z_k \rangle \geq 0,$$

ou encore,

$$\langle x_k - F(x_k) - z_k, z_k - x^* \rangle \geq 0. \tag{5.20}$$

Donc, par définition de d_k et des relations (5.18), (5.19), (5.20) et (5.17), nous obtenons

$$\begin{aligned} \langle d_k, x_k - x^* \rangle &= \left\langle x_k - z_k + \frac{F(y_k)}{\alpha_k}, x_k - x^* \right\rangle \\ &= \left\langle x_k - z_k, x_k - x^* \right\rangle + \left\langle \frac{F(y_k)}{\alpha_k}, x_k - x^* \right\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left\langle x_k - F(x_k) + F(x_k) - z_k, x_k - x^* \right\rangle + \left\langle \frac{F(y_k)}{\alpha_k}, x_k + y_k - y_k - x^* \right\rangle \\
&= \langle x_k - F(x_k) - z_k, x_k - x^* \rangle + \langle F(x_k), x_k - x^* \rangle \\
&\quad + \frac{1}{\alpha_k} \langle F(y_k), x_k - y_k \rangle + \frac{1}{\alpha_k} \langle F(y_k), y_k - x^* \rangle \\
&= \langle x_k - F(x_k) - z_k, x_k - z_k + z_k - x^* \rangle + \langle F(x_k), x_k - x^* \rangle \\
&\quad + \frac{1}{\alpha_k} \langle F(y_k), x_k - y_k \rangle + \frac{1}{\alpha_k} \langle F(y_k), y_k - x^* \rangle \\
&\geq \langle x_k - F(x_k) - z_k, x_k - z_k \rangle + \langle x_k - F(x_k) - z_k, z_k - x^* \rangle \\
&\quad + \frac{1}{\alpha_k} \langle F(y_k), x_k - y_k \rangle \\
&\geq \langle x_k - F(x_k) - z_k, x_k - z_k \rangle + \frac{1}{\alpha_k} \langle F(y_k), x_k - y_k \rangle \\
&= \langle x_k - F(x_k) - z_k, x_k - z_k \rangle + \frac{1}{\alpha_k} \langle F(y_k), \alpha_k(x_k - z_k) \rangle \\
&= \langle x_k - F(x_k) - z_k, x_k - z_k \rangle + \langle F(y_k), x_k - z_k \rangle \\
&= \langle x_k - z_k - (F(x_k) - F(y_k)), x_k - z_k \rangle \\
&= \|x_k - z_k\|^2 - \langle F(x_k) - F(y_k), x_k - z_k \rangle \\
&\geq (1 - \mu) \|x_k - z_k\|^2 \tag{5.21}
\end{aligned}$$

Si $r_{\Omega(x_k)}(x_k) \neq 0$, c'est-à-dire, par définition de $r_{\Omega(x_k)}$ et de z_k , que nous avons

$$\|x_k - z_k\| \neq 0.$$

Dès lors, nous avons $x_k \neq z_k$ et la relation (5.21) nous permet de déduire que $d_k \neq 0$.

□

5.4 Convergence des algorithmes

Dans l'ALGORITHME 3, le nouveau point x_{k+1} produit est alors dans $\Omega(x_k)$, alors que x_k n'est pas nécessairement dans $\Omega(x_k)$, ce qui nous empêche d'utiliser des résultats existants au sujet des projections et rend la démonstration de la convergence plus compliquée. Établissons la convergence de l'ALGORITHME 3.

Théorème 5.4.1. *Supposons que l'Hypothèse 6 est satisfaite. Soit une suite $\{x_k\}$ générée par l'ALGORITHME 3. Alors la suite est bornée, et tout point d'accumulation de $\{x_k\}$ est une solution du problème d'inéquation quasi-variationnelle (5.1).*

Preuve

Soit x^* un élément de l'ensemble S^* . Alors par le Lemme 5.2.1, la relation (5.16) et la définition de β_k dans l'ALGORITHME 3, nous avons

$$\begin{aligned}
 \|x_{k+1} - x^*\|^2 &= \|P_{\Omega(x_k)}(x_k - \beta_k(x_k - \bar{x}_k + \alpha_k F(\bar{x}_k))) - x^*\|^2 \\
 &\leq \|x_k - x^* - \beta_k(x_k - \bar{x}_k + \alpha_k F(\bar{x}_k))\|^2 \\
 &= \|x_k - x^*\|^2 - 2\beta_k \langle x_k - x^*, x_k - \bar{x}_k + \alpha_k F(\bar{x}_k) \rangle + \beta_k^2 \|x_k - \bar{x}_k + \alpha_k F(\bar{x}_k)\|^2 \\
 &\leq \|x_k - x^*\|^2 - 2(1 - \mu)\beta_k \|x_k - \bar{x}_k\|^2 + \beta_k^2 \|x_k - \bar{x}_k + \alpha_k F(\bar{x}_k)\|^2 \\
 &= \|x_k - x^*\|^2 - 2\rho(1 - \mu)^2 \frac{\|x_k - \bar{x}_k\|^4}{\|x_k - \bar{x}_k + \alpha_k F(\bar{x}_k)\|^2} \\
 &\quad + \rho^2(1 - \mu)^2 \frac{\|x_k - \bar{x}_k\|^4}{\|x_k - \bar{x}_k + \alpha_k F(\bar{x}_k)\|^2} \\
 &= \|x_k - x^*\|^2 - \rho(2 - \rho)(1 - \mu)^2 \frac{\|x_k - \bar{x}_k\|^4}{\|x_k - \bar{x}_k + \alpha_k F(\bar{x}_k)\|^2}, \tag{5.22}
 \end{aligned}$$

ce qui implique que la suite $\{\|x_k - x^*\|\}$ est décroissante et donc convergente. Donc la suite $\{x_k\}$ est bornée. En conséquence, nous avons de la relation (5.22) que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|x_k - \bar{x}_k\|^2}{\|x_k - \bar{x}_k + \alpha_k F(\bar{x}_k)\|^2} \tag{5.23}$$

De plus, la suite $\{\bar{x}_k\}$ est bornée. En effet, en utilisant le Lemme 5.2.1 et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous obtenons

$$\|\bar{x}_k\| = \|P_{\Omega(x_k)}(x_k - \alpha_k F(x_k))\|$$

$$\begin{aligned}
&= \|P_{\Omega(x_k)}(x_k - \alpha_k F(x_k) + x^* - P_{\Omega(x_k)}(x^*))\| \\
&\leq \|x^*\| + \|x_k - x^* - \alpha_k F(x_k)\| \\
&\leq \|x^*\| + \|x_k - x^*\| + \alpha_k \|F(x_k)\|
\end{aligned}$$

ce qui, avec le fait que la suite $\{x_k\}$ est bornée, permet de déduire que la suite $\{\bar{x}_k\}$ est bornée. Donc la suite $\{\|x_k - \bar{x}_k + \alpha_k F(\bar{x}_k)\|\}$ est aussi bornée. De plus de la relation (5.23), nous avons

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - \bar{x}_k\| = 0 \quad (5.24)$$

Supposons que \bar{x} est un point d'accumulation de $\{x_k\}$. Alors il existe une sous-suite $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, où $\mathbb{N} \subseteq \{0, 1, \dots\}$, tel que

$$\lim_{k \in \mathbb{N}, k \rightarrow \infty} x_k = \bar{x}.$$

A présent, nous pouvons montrer que \bar{x} est une solution du QVIP. Pour ce faire, nous devons montrer que

$$\bar{x} \in \Omega(\bar{x}). \quad (5.25)$$

et

$$\langle F(\bar{x}), y - \bar{x} \rangle \geq 0, \quad \forall y \in K(\bar{x}). \quad (5.26)$$

1. Vérifions la relation (5.25).

De la relation (5.24), nous avons

$$\lim_{k \in \mathbb{N}, k \rightarrow \infty} \bar{x}_k = \bar{x}.$$

Or, cette dernière relation et le fait que $K(\cdot)$ est semi-continue supérieurement mais aussi que $\bar{x}_k \in \Omega(x_k)$, nous permettent de déduire que $\bar{x} \in \Omega(\bar{x})$.

2. Vérifions la relation (5.26).

Pour ce faire, nous prouvons, dans un premier temps, qu'il existe au moins une sous-suite $\{\|e_k(x_k, 1)\|\}_{k \in \bar{\mathbb{N}}}$ (où $\bar{\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$) de $\{\|e_k(x_k, 1)\|\}$ telle que

$$\lim_{k \in \bar{\mathbb{N}}, k \rightarrow \infty} \|e_k(x_k, 1)\| = 0, \quad (5.27)$$

ou $e_k(x_k, \alpha) = x_k - P_{\Omega(x_k)}(x_k - \alpha F(x_k))$. Deux cas sont à considérer.

– CAS 1 : $\inf_{k \in \mathbb{N}} \{\alpha_k\} = \alpha_{\min} > 0$.

Par Lemme 5.2.3, nous avons $\min\{1, \alpha_k\} \|e_k(x_k, 1)\| \leq \|e_k(x_k, \alpha)\|$, ce qui revient à

$$\|e_k(x_k, 1)\| \leq \frac{\|x_k - \bar{x}\|}{\min\{1, \alpha_k\}}.$$

Or, en considérant cette dernière inéquation et la relation (5.24), nous avons

$$\lim_{k \in \mathbb{N}, k \rightarrow \infty} \|e_k(x_k, 1)\| \leq \lim_{k \in \mathbb{N}, k \rightarrow \infty} \frac{\|x_k - \bar{x}\|}{\min\{1, \alpha_k\}}.$$

– CAS 2 : $\inf_{k \in \mathbb{N}} \{\alpha_k\} = \alpha_{\min} = 0$.

Puisque $\alpha_{\min} = 0$, il existe une sous-suite $\{\alpha_k\}_{k \in \bar{\mathbb{N}}}$, où $\bar{\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$, telle que

$$\lim_{k \in \bar{\mathbb{N}}, k \rightarrow \infty} \alpha_k = 0.$$

Donc, pour toutes valeurs de α_k suffisamment petites, le terme $\frac{\alpha_k}{l}$ ne satisfait pas la règle de recherche donnée par la relation (5.9). On a donc

$$\frac{\alpha_k}{l} \left\langle x_k - x_k \left(\frac{\alpha_k}{l} \right), F(x_k) - F \left(x_k \left(\frac{\alpha_k}{l} \right) \right) \right\rangle > \mu \left\| x_k - x_k \left(\frac{\alpha_k}{l} \right) \right\|^2,$$

où $x_k(\frac{\alpha_k}{l}) = P_{K(x_k)}(x_k - \frac{\alpha_k}{l} F(x_k))$. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz nous avons

$$\mu \|x_k - x_k(\frac{\alpha_k}{l})\|^2 < \frac{\alpha_k}{l} (\|x_k - x_k(\frac{\alpha_k}{l})\| + \|F(x_k) - F(x_k(\frac{\alpha_k}{l}))\|),$$

ce qui revient à

$$\mu \frac{\|x_k - x_k(\frac{\alpha_k}{l})\|}{\frac{\alpha_k}{l}} < \|F(x_k) - F(x_k(\frac{\alpha_k}{l}))\|.$$

Par le Lemme (5.2.3), nous avons

$$\mu \|e_k(x_k, 1)\| \leq \mu \frac{\|x_k - x_k(\frac{\alpha_k}{l})\|}{\frac{\alpha_k}{l}},$$

c'est-à-dire,

$$\|e_k(x_k, 1)\| < \frac{1}{\mu} \|F(x_k) - F(x_k(\frac{\alpha_k}{l}))\|.$$

De plus, par définition de $x_k(\frac{\alpha_k}{l})$ et le Lemme 5.2.1, nous avons que

$$\begin{aligned}
\left\| x_k - x_k\left(\frac{\alpha_k}{l}\right) \right\| &= \left\| x_k - \bar{x}_k + \bar{x}_k - P_{\Omega(x_k)}\left[x_k - \frac{\alpha_k}{l}F(x_k)\right] \right\| \\
&\leq \left\| x_k - \bar{x}_k \right\| + \left\| \bar{x}_k - P_{\Omega(x_k)}\left[x_k - \frac{\alpha_k}{l}F(x_k)\right] \right\| \\
&= \left\| x_k - \bar{x}_k \right\| + \left\| P_{\Omega(x_k)}\left[x_k - \alpha_k F(x_k)\right] - P_{\Omega(x_k)}\left[x_k - \frac{\alpha_k}{l}F(x_k)\right] \right\| \\
&= \left\| x_k - \bar{x}_k \right\| + \left(\frac{1}{l} - 1\right)\alpha_k \|F(x_k)\| \\
&\rightarrow 0 \quad (k \in \bar{\mathbb{N}}, k \rightarrow \infty).
\end{aligned}$$

Ce qui permet d'avoir

$$\lim_{k \in \bar{\mathbb{N}}, k \rightarrow \infty} \|F(x_k) - F(x_k(\frac{\alpha_k}{l}))\| = 0.$$

Donc, nous avons

$$\lim_{k \in \bar{\mathbb{N}}, k \rightarrow \infty} \|e_k(x_k, 1)\| = 0.$$

Nous avons donc bien le résultat escompté.

Continuons maintenant de prouver la relation (5.26). Puisque $\Omega(\cdot)$ est semi-continue inférieurement, pour tout $y \in \Omega(\bar{x})$, il existe une suite $\{y_k\}$ avec $y_k \in \Omega(x_k)$ tel que

$$\lim_{k \in \bar{\mathbb{N}}, k \rightarrow \infty} y_k = y.$$

Par la définition de $e_k(x_k, 1)$ et par la première partie du Lemme 5.2.1, nous avons

$$\langle x_k - e_k(x_k, 1) - x_k + F(x_k), y_k - x_k + e_k(x_k, 1) \rangle \geq 0.$$

Ce qui revient à

$$\langle F(x_k) - e_k(x_k, 1), y_k + e_k(x_k, 1) - x_k \rangle \geq 0.$$

En développant, nous avons

$$\langle F(x_k), y_k - x_k \rangle + \langle F(x_k), e_k(x_k, 1) \rangle - \langle e_k(x_k, 1), y_k - x_k \rangle - \|e_k(x_k, 1)\|^2 \geq 0.$$

nous en déduisons que

$$\langle F(\bar{x}), y - \bar{x} \rangle \geq 0.$$

Nous en concluons que \bar{x} est une solution du problème (5.1). Ce qui achève la preuve.

□

Théorème 5.4.2. *Supposons que l'Hypothèse 6 est vérifiée. Soit $\{x_k\}$ une suite générée par l'ALGORITHME 3. Si F est strictement monotone en un point d'accumulation de $\{x_k\}$, noté \bar{x} , alors*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \bar{x}.$$

Preuve

Par hypothèse, nous que \bar{x} est un point d'accumulation de $\{x_k\}$, il existe donc une sous-suite $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ où $\mathbb{N} \subseteq \{0, 1, \dots\}$, tel que

$$\lim_{k \in \mathbb{N}, k \rightarrow \infty} x_k = \bar{x}. \quad (5.28)$$

Du Théorème 5.4.1, nous savons que \bar{x} est une solution du problème (5.1). Désignons par x^* un élément de S^* . Alors de la définition de S^* , nous avons

$$\langle F(x^*), \bar{x} - x^* \rangle \geq 0.$$

Faisons tendre k vers l'infini ($k \in \mathbb{N}$), en considérant les relations (5.28) et (5.24), nous obtenons

$$\langle F(x^*), \bar{x} - x^* \rangle \geq 0, \quad (5.29)$$

qui, en considérant la monotonicté de F , implique que

$$\langle F(\bar{x}), \bar{x} - x^* \rangle \geq 0. \quad (5.30)$$

D'autre part, nous avons que $x^* \in \Omega(x_k)$. En utilisant le fait que $\Omega(\cdot)$ est semi-continue supérieurement et la relation (5.28), nous obtenons

$$x^* \in \Omega(\bar{x}).$$

Par hypothèse, \bar{x} est une solution du QVIP, nous avons

$$\langle F(\bar{x}), x^* - \bar{x} \rangle \geq 0. \quad (5.31)$$

Donc, des relations (5.30) et (5.31), nous obtenons

$$\langle F(\bar{x}), x^* - \bar{x} \rangle = 0. \quad (5.32)$$

De la monotonicté de F et de la relation (5.32), nous avons

$$\langle F(x^*), x^* - \bar{x} \rangle \geq 0. \quad (5.33)$$

Dès lors, les relations (5.30) et (5.33), permettent de mettre en évidence que

$$\langle F(x^*), x^* - \bar{x} \rangle = 0. \quad (5.34)$$

Donc,

$$\langle F(\bar{x}), x^* - \bar{x} \rangle = \langle F(x^*), x^* - \bar{x} \rangle = 0.$$

Ce qui implique que

$$\langle F(x^*) - F(\bar{x}), x^* - \bar{x} \rangle = 0.$$

Or, par hypothèse, nous avons que F est strictement monotone en \bar{x} . Nous obtenons donc que $\bar{x} = x^* \in S^*$. Donc, nous pouvons utiliser \bar{x} à la place de x^* dans la relation (5.22), et obtenons que la suite $\{\|x_k - \bar{x}\|\}$ est convergente. Du fait qu'il existe une sous-suite $\{\|x_k - \bar{x}\|\}_{k \in \mathbb{N}}$ convergente vers zéro, nous avons

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \bar{x}$$

Ce qui achève la preuve. □

Terminons cette section en démontrant la convergence de l'ALGORITHME 4 vers une solution du problème d'inéquation quasi-variationnelle (5.1).

Théorème 5.4.3. *Supposons que les Hypothèses (6) et (7) sont vérifiées. Soit $\{x_k\}$ une suite générée par l'ALGORITHME 4. Alors la suite $\{x_k\}$ est bornée, et tout point d'accumulation de $\{x_k\}$ est une solution du QVIP (5.1).*

Preuve

Soit x^* un élément de l'ensemble S^* . Par le Lemme 5.2.1, la relation (5.21) et la définition de β_k de l'ALGORITHME 4, nous avons

$$\begin{aligned} \|x_{k+1} - x^*\|^2 &= \|P_{\Omega(x_k)}(x_k - \beta_k d_k) - x^*\|^2 \\ &\leq \|x_k - x^* - \beta_k d_k\|^2 \\ &= \|x_k - x^*\|^2 - 2\beta_k \langle x_k - x^*, d_k \rangle + \beta_k^2 \|d_k\|^2 \\ &\leq \|x_k - x^*\|^2 - 2(1 - \mu)\beta_k \|x_k - z_k\|^2 + \beta_k^2 \|d_k\|^2 \\ &= \|x_k - x^*\|^2 - 2\rho(1 - \mu)^2 \frac{\|x_k - z_k\|^4}{\|d_k\|^2} + \rho^2(1 - \mu)^2 \frac{\|x_k - z_k\|^4}{\|d_k\|^2} \\ &= \|x_k - x^*\|^2 - \rho(2 - \rho)(1 - \mu)^2 \frac{\|x_k - z_k\|^4}{\|d_k\|^2} \\ &\leq \|x_k - x^*\|^2 \end{aligned} \tag{5.35}$$

ce qui implique que la suite $\{\|x_k - x^*\|\}$ est décroissante et donc $\{x_k\}$ est bornée. Par conséquent, nous avons de la relation (5.35) que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|x_k - z_k\|^2}{\|d_k\|^2} \quad (5.36)$$

Par la définition de z_k et du Lemme 5.2.1, nous avons

$$\begin{aligned} \|z_k - x^*\| &= \|P_{\Omega(x_k)}(x_k - F(x_k)) - x^*\| \\ &\leq \|x_k - F(x_k) - x^*\| \\ &\leq \|x_k\| + \|F(x_k)\| + \|x^*\|, \end{aligned}$$

ce qui, avec la continuité de F et le fait que la suite $\{x_k\}$, nous permet de dire que la suite $\{z_k\}$ est bornée. Donc les suites $\{y_k\}$ et $\{F(y_k)\}$ sont aussi bornées.

Supposons que \bar{x} est un point d'accumulation de la suite $\{x_k\}$. Alors il existe une sous-suite $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, où $\mathbb{N} \subseteq \{0, 1, \dots\}$, tel que

$$\lim_{k \in \mathbb{N}, k \rightarrow \infty} x_k = \bar{x}. \quad (5.37)$$

A présent, nous pouvons montrer qu'il existe au moins une sous-suite $\{x_k - z_k\}_{k \in \bar{\mathbb{N}}}$, où $\bar{\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ tel que

$$\lim_{k \in \bar{\mathbb{N}}, k \rightarrow \infty} \|x_k - z_k\| = 0. \quad (5.38)$$

Deux cas sont à considérer.

– CAS 1 : $\inf_{k \in \mathbb{N}} \{\alpha_k\} = \alpha_{min} > 0$.

Dans ce cas, nous avons que $\{d_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ par le fait que les suites $\{x_k\}$, $\{z_k\}$ et $\{F(y_k)\}$ sont bornées. Donc, nous avons en considérant la relation (5.36) que

$$\lim_{k \in \bar{\mathbb{N}}, k \rightarrow \infty} \|x_k - z_k\| = 0.$$

– CAS 2 : $\inf_{k \in \mathbb{N}} \{\alpha_k\} = \alpha_{min} = 0$.

Puisque $\alpha_{min} = 0$, il existe une sous-suite $\{\alpha_k\}_{k \in \bar{\mathbb{N}}}$, où $\bar{\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$, telle que

$$\lim_{k \in \bar{\mathbb{N}}, k \rightarrow \infty} \alpha_k = 0. \quad (5.39)$$

Donc, pour toutes valeurs de α_k suffisamment petites, le terme $\frac{\alpha_k}{l}$ ne satisfait pas la règle de recherche donnée par la relation (5.17). On a donc

$$\left\langle F(x_k) - F\left(\left(1 - \frac{\alpha_k}{l}\right)x_k + \frac{\alpha_k}{l}z_k\right), x_k - z_k \right\rangle > \mu \|x_k - z_k\|^2.$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous avons

$$\left\| F(x_k) - F\left(\left(1 - \frac{\alpha_k}{l}\right)x_k + \frac{\alpha_k}{l}z_k \right) \right\| > \mu \|x_k - z_k\|, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Dès lors, en utilisant la relation (5.39) et la continuité de $F(\cdot)$, nous obtenons

$$\lim_{k \in \mathbb{N}, k \rightarrow \infty} \|x_k - z_k\| = 0.$$

La relation (5.38) est donc vérifiée pour les deux cas.

A présent, nous allons montrer que \bar{x} est une solution du problème (5.1). Pour ce faire, nous devons avoir que

$$\bar{x} \in \Omega(\bar{x}), \quad (5.40)$$

et

$$\langle F(\bar{x}), w - \bar{x} \rangle \geq 0, \quad \forall w \in \Omega(\bar{x}). \quad (5.41)$$

1. Vérifions la relation (5.40).

Des relations (5.38) et (5.37), nous avons

$$\lim_{k \in \mathbb{N}, k \rightarrow \infty} z_k = \bar{x}. \quad (5.42)$$

De plus, par la semi-continuité de $\Omega(\cdot)$ et le fait que $z_k \in \Omega(x_k)$, nous pouvons déduire que la relation (5.40) est satisfaite.

2. Vérifions la relation (5.41).

Par hypothèse, nous avons que $K(\cdot)$ est semi-continu inférieurement. Dès lors, pour tout $w \in \Omega(\bar{x})$ il existe une suite $\{w_k\}$ avec $w_k \in \Omega(x_k)$, où $k \in \mathbb{N}$, tel que

$$\lim_{k \in \mathbb{N}, k \rightarrow \infty} w_k = w.$$

Du plus, par la définition de projection et la définition de z_k , nous avons

$$\langle z_k - x_k + F(x_k), w_k - z_k \rangle \geq 0.$$

Ce qui revient à

$$\langle F(x_k), w_k - z_k \rangle + \langle z_k - x_k, w_k - z_k \rangle \geq 0.$$

Dès lors, en faisant tendre k vers l'infini ($k \in \mathbb{N}$) et en considérant les relation (5.39) et (5.42) ainsi que les suites $\{z_k\}$ et $\{w_k\}$ sont bornées, nous en déduisons que

$$\langle F(\bar{x}), w - \bar{x} \rangle \geq 0.$$

Ce qui vérifie la relation (5.41).

Nous en concluons que \bar{x} est une solution du problème *QVIP* (5.1). Ce qui achève la preuve.

□

Nous avons de manière similaire à la preuve du Théorème 5.4.2, le théorème suivant sur la convergence de la suite $\{x_k\}$ générée par l'ALGORITHME 4.

Théorème 5.4.4. *Supposons que les Hypothèses 7 et 6, sont vérifiées. Soit $\{x_k\}$ une suite générée par l'ALGORITHME 4. Si F est strictement monotone en un point d'accumulation de $\{x_k\}$, noté \bar{x} , alors*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \bar{x}$$

5.5 Résultats numériques

Afin d'illustrer le comportement des algorithmes de ce chapitre, nous les avons implémentés en MATLAB et testés sur trois exemples décrits dans [15]. Nous utilisons le test d'arrêt $r_{\Omega(x_k)}(x_k) < \epsilon$. De plus, nous posons les valeurs suivantes pour les paramètres de l'ALGORITHME 3 et l'ALGORITHME 4 : $\epsilon = 10^{-6}$, $\gamma = 1$, $l = 0.5$ et $\rho = 1.99$. Le paramètre μ quant à lui, est variable pour les différents exemples. Dans les résultats reportés ci-dessous, les temps CPU sont en secondes. Le symbole "/" signifie que l'algorithme boucle ou que le nombre d'itérations excède la valeur limite qui est de 2000. Dans ce cas, nous n'avons pas obtenu de solutions.

Exemple 5.5.1. *Considérons un jeu composé de deux joueurs dans lequel chaque joueur choisit un x^i entre 0 et 10 et la somme doit être inférieure ou égale à 15. Les fonctions objectifs et les contraintes sont définis comme suit.*

• *Joueur 1 :*

$$\begin{aligned}\theta_1(x^1, x^2) &= (x^1)^2 + \frac{8}{3}x^1x^2 - 34x^1 \\ \Omega_1(\bar{x}^2) &= \{0 \leq x^1 \leq 10, x^1 \leq 15 - \bar{x}^2\}\end{aligned}$$

• *Joueur 2 :*

$$\begin{aligned}\theta_2(x^1, x^2) &= (x^2)^2 + \frac{5}{4}x^1x^2 - 24.25x^2 \\ \Omega_2(\bar{x}^1) &= \{0 \leq x^2 \leq 10, x^2 \leq 15 - \bar{x}^1\}.\end{aligned}$$

La reformulation de ce problème sous forme d'un problème d'inéquation quasi-variationnelle, nous permet de définir F par

$$F(x) = \begin{pmatrix} 2x^1 + \frac{8}{3}x^2 - 34 \\ 2x^2 + \frac{5}{4}x^1 - 24.25 \end{pmatrix}$$

Les résultats de cet exemple sont repris dans TAB.5.1-TAB.5.2-TAB.5.3 utilisant différents points de départ et différentes valeurs de μ (0.2, 0.3 et 0.4).

Point de départ	Nombre d'itérations		Temps CPU		Solution	
	ALGO 3	ALGO 4	ALGO 3	ALGO 4	ALGO 3	ALGO 4
$(0, 0)^T$	130	211	9.1728	12.8388	$(5, 9)^T$	$(5, 9)^T$
$(10, 0)^T$	1	1	0.0620	0.0624	$(10, 5)^T$	$(10, 5)^T$
$(10, 10)^T$	141	173	10.4676	10.1400	$(5, 9)^T$	$(5, 9)^T$
$(0, 10)^T$	/	/	/	/	/	/
$(5, 5)^T$	126	172	9.2976	10.8108	$(5, 9)^T$	$(5, 9)^T$

TAB. 5.1 – Résultats de l'Exemple 1 - $\mu = 0.2$

Point de départ	Nombre d'itérations		Temps CPU		Solution	
	ALGO 3	ALGO 4	ALGO 3	ALGO 4	ALGO 3	ALGO 4
$(0, 0)^T$	146	178	9.7500	11.0916	$(5, 9)^T$	$(5, 9)^T$
$(10, 0)^T$	1	1	0.0936	0.0624	$(10, 5)^T$	$(10, 5)^T$
$(10, 10)^T$	/	159	/	9.0012	$(5, 9)^T$	$(5, 9)^T$
$(0, 10)^T$	/	/	/	/	/	/
$(5, 5)^T$	131	155	9.1572	8.8920	$(5, 9)^T$	$(5, 9)^T$

TAB. 5.2 – Résultats de l'Exemple 1 - $\mu = 0.3$

Point de départ	Nombre d'itérations		Temps CPU		Solution	
	ALGO 3	ALGO 4	ALGO 3	ALGO 4	ALGO 3	ALGO 4
$(0, 0)^T$	/	208	/	12.885	$(5, 9)^T$	$(5, 9)^T$
$(10, 0)^T$	/	/	/	/	/	/
$(10, 10)^T$	139	1142	9.3600	77.95370	$(5, 9)^T$	$(5, 9)^T$
$(0, 10)^T$	127	509	8.9544	34.8038	$(5, 9)^T$	$(5, 9)^T$
$(5, 5)^T$	123	184	8.5332	11.0916	$(5, 9)^T$	$(5, 9)^T$

TAB. 5.3 – Résultats de l'Exemple 1 - $\mu = 0.4$

Analyse des résultats.

L'ensemble des solutions du GNEP est composé du point $(5, 9)^T$ et de la ligne segment $[(9, 6)^T, (10, 5)^T]$. Nous pouvons voir que le nombre d'itérations est, quelle que soit la valeur de μ , toujours supérieur pour l'ALGORITHME 4. De plus, le choix de la valeur du paramètre μ affecte les performances de l'algorithme, tant au niveau du nombre d'itérations que du temps CPU.

Exemple 5.5.2. Dans cet exemple, l'ensemble $\Omega_2(\bar{x}^1) = \{0 \leq x^2 \leq 10, x^2 \leq 15 - \bar{x}^1\}$ de l'exemple 5.5.1 est remplacée par $\Omega_2(\bar{x}^1) = \{2 \leq x^2 \leq 10\}$.

Point départ	Nombre d'itérations		Temps CPU		Solution	
	ALGO 3	ALGO 4	ALGO 3	ALGO 4	ALGO 3	ALGO 4
$(0, 0)^T$	122	165	8.0808	9.7968	$(5, 9)^T$	$(5, 9)^T$
$(10, 0)^T$	199	154	12.5844	9.1260	$(5, 9)^T$	$(5, 9)^T$
$(10, 10)^T$	100	32	6.6612	2.0124	$(5, 9)^T$	$(5, 9)^T$
$(0, 10)^T$	118	150	7.6752	9.0408	$(5, 9)^T$	$(5, 9)^T$
$(5, 5)^T$	114	157	7.2852	9.2352	$(5, 9)^T$	$(5, 9)^T$

TAB. 5.4 – Résultats de l'Exemple 2 - $\mu = 0.3$

Analyse des résultats.

L'ensemble des solutions du GNEP est composé du point $(5, 9)^T$. Contrairement à l'Exemple 5.5.1, le nombre d'itérations pour l'ALGORITHME 4 n'est pas toujours supérieur à celui de l'ALGORITHME 3. Cela dépend du point de départ. Néanmoins, nous pouvons voir que dans tous les cas le temps CPU est réduit par rapport au temps CPU de l'Exemple 5.5.1.

Exemple 5.5.3. Cet exemple est une modification du problème d'équilibre de Nash-Cournot-Stackelberg. Nous considérons un marché oligopolistique dans lequel m firmes fournissent un produit homogène commun dans un modèle non coopératif. Soit $p : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, dépendant de la quantité totale Q de la production sur le marché, le prix unitaire auquel les consommateurs achèteront cette quantité de produits. La fonction p est appelée la courbe inverse de demande. Le coût de production est représenté par une fonction de coût θ_i sous la forme suivante

$$\theta_i(x^i) = c_i x^i + \frac{\beta_i}{\beta_i + 1} \tau_i^{-\frac{1}{\beta_i}} (x^i)^{\frac{1+\beta_i}{\beta_i}}$$

où $c_i, \beta_i, \tau_i, i = 1, 2, \dots, m$, sont des paramètres positifs. De plus, posons

$$p(Q) = 5000^{\frac{1}{\eta}} Q^{-\frac{1}{\eta}}$$

où la paramètre positif η représente l'élasticité de la demande¹. Nous considérons l'équilibre de Nash généralisé d'un marché oligopolistique dans lequel la production x^i est sujette à la contrainte suivante $x^i \in X_i, i = 1, 2, \dots, m$, mais également à une limite commune de production

$$\sum_{i=1}^m x^i \leq N.$$

L'équilibre de Nash généralisé est le vecteur x^* tel que x^{*i} est solution du problème d'optimisation

$$\min_{x^i \in \bar{X}_i} \theta_i(x^i) - x^i p\left(x^i + \sum_{j=1, j \neq i}^m x^{*j}\right),$$

où

$$\bar{X}_i = \left\{ x^i | x^i \in X_i, x^i + \sum_{j=1, j \neq i}^m x^{*j} \leq N \right\}.$$

En utilisant les fonctions θ_i et p , le problème peut être reformulé en un problème d'inéquation quasi-variationnelle. En considérant un marché avec 5 firmes, la fonction F est définie par

$$F^i(x) = c_i + \left(\frac{x^i}{\tau_i}\right)^{\frac{1}{\beta_i}} + \left(\frac{5000}{Q}\right)^{\frac{1}{\eta}} \left(\frac{x^i}{\eta Q} - 1\right), \quad i = 1, \dots, 5.$$

où $Q = \sum_{i=1}^5 x^i$. Toutes les firmes ont la même borne de production minimale qui est 1 et la même borne de production maximum qui est 150, c'est-à-dire,

$$X_i = \{x^i | 1 \leq x^i \leq 150\}, \quad i = 1, \dots, 5$$

Les paramètres des fonctions de coût de production sont donnés dans TAB.5. De plus, nous fixons les valeurs de η et N à, respectivement, 1.1 et 700.

Paramètres	Firme 1	Firme 2	Firme 3	Firme 4	Firme 5
c_i	10	8	6	4	2
τ_i	5	5	5	5	5
β_i	1.2	1.1	1.0	0.9	0.8

TAB. 5.5 – Spécification des paramètres pour les coûts de productions

¹L'élasticité de la demande est un concept économique qui permet de mesurer le degré de sensibilité de la demande aux variations de prix ou des revenus.

Les résultats de cet exemple sont repris dans TAB.6 et TAB.7 avec des points de départ différents.

Type algorithmique	Nombre d'itérations	Tps CPU (seconde)	Solution				
			Firme 1	Firme 2	Firme 3	Firme 4	Firme 5
ALGO 3	57	2.19961	36.9325	41.8181	43.7066	42.6592	39.1790
ALGO 4	57	2.40242	36.9325	41.8181	43.7066	42.6592	39.1790

TAB. 5.6 – Résultat de l'Exemple 3 - Point de départ $x_0 = (50, 50, 50, 50, 50)^T$ - $\mu = 0.1$

Type algorithmique	Nombre d'itérations	Tps CPU (seconde)	Solution				
			Firme 1	Firme 2	Firme 3	Firme 4	Firme 5
ALGO 3	52	2.21521	36.9325	41.8181	43.7066	42.6592	39.1790
ALGO 4	51	1.96561	36.9325	41.8181	43.7066	42.6592	39.1790

TAB. 5.7 – Résultat de l'Exemple 3 - Point de départ $x_0 = (10, 10, 10, 10, 10)^T$ - $\mu = 0.1$

Analyse des résultats.

Nous remarquons que pour les deux points de départ considérés la solution est $(36.9325, 41.8181, 43.7066, 42.6592, 39.1790)$. Pour le point de départ $x_0 = (50, 50, 50, 50, 50)^T$ nous avons le même nombre d'itérations. Dans ce cas, la condition de recherche linéaire est vérifiée dès le début et les deux algorithmes sont alors pratiquement les mêmes. Le temps CPU est légèrement plus élevé pour l'ALGORITHME 4. Pour le point de départ $x_0 = (10, 10, 10, 10, 10)^T$ le nombre d'itérations est légèrement différent et le temps CPU est alors moins élevé pour l'ALGORITHME 4.

Conclusion

Le but de ce mémoire était de définir le problème d'équilibre de Nash généralisé et de présenter différentes méthodes permettant de le résoudre. Pour cela, il a fallu introduire toutes les notions nécessaires comme la convexité, le problème d'équilibre défini au sens de Blum et Oettli, le problème d'inéquation variationnelle, et autres. Tout d'abord, nous avons vu que le problème d'équilibre de Nash généralisé pouvait se réduire à une inéquation variationnelle mais en perdant certaines solutions. Nous avons alors introduit la fonction de Nikaido-Isoda. Nous trouvions alors que le problème GNEP pouvait se reformuler de telle sorte que les minima globaux de ces reformulations correspondent à un équilibre de Nash normalisé. Deux de ces reformulations étaient différentiables avec une fonction objectif continuellement différentiable, et leurs points stationnaires sont des minima globaux sous certaines hypothèses. Ensuite, nous avons présenté une méthode de descente avec recherche linéaire pour trouver les solutions du problème GNEP. Cette méthode inspirée d'une méthode de relaxation standard utilise la fonction de Nikaido-Isoda régularisée et une condition de recherche linéaire inexacte de type Armijo. Finalement, nous avons travaillé sur les projections en nous basant sur une formulation d'inéquation quasi-variationnelle du problème GNEP. Le premier demandait de nombreuses projections à chaque itération tandis que le second n'en exigeait que deux. Pour tous les algorithmes présents dans ce travail nous avons montré la convergence.

Annexe

A. Fonctions pseudo-convexe

Définition 5.5.1. Soit θ une fonction numérique définie sur un ensemble ouvert de \mathbb{R}^n contenant l'ensemble X . On dit que la fonction θ est pseudo-convexe en $\bar{x} \in X$ si θ est différentiable en \bar{x} et si

$$\left. \begin{array}{l} x \in X \\ \nabla \theta(\bar{x})(x - \bar{x}) \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \theta(x) \geq \theta(\bar{x}).$$

On dira que la fonction est pseudo-convexe sur X si elle est pseudo-convexe en chaque $x \in X$.

B. Conditions d'optimalité de Karush-Kuhn-Tucker

Considérons le problème suivant

$$(P) \left\{ \begin{array}{l} \min f(x) \\ \text{tq. } g_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m \end{array} \right.$$

où f, g_i sont des fonctions de classe C^1 de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} . Rappelons que l'ensemble admissible de (P) est donné par

$$C = \{x \in \mathbb{R}^n | g_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m\}.$$

Le théorème de Karush-Kuhn-Tucker s'énonce comme suit :

Théorème 5.5.1. Soit x^* un minimum local du problème (P) et supposons que les contraintes sont qualifiées en x^* . Alors il existe $\lambda^* \in \mathbb{R}^m$ tel que

$$(KKT) \begin{cases} \nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \nabla g_i(x^*) = 0 \\ \lambda_i^* g_i(x^*) = 0 \quad i = 1, \dots, m \\ \lambda_i^* \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \\ g_i(x^*) \leq 0 \quad i = 1, \dots, m. \end{cases}$$

Introduisons la fonction de Lagrange

$$L(x, \lambda, \mu) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x).$$

Alors la première condition de KKT est équivalente à $\nabla L(x^*, \lambda^*, \mu^*) = 0$. Le vecteur λ^* est appelé le vecteur des multiplicateurs de Lagrange. Dans le cas où le problème (P) est convexe les conditions de (KKT) deviennent suffisantes.

Proposition 5.5.1. (*Conditions nécessaires et suffisantes*)

Conditions suffisantes : Supposons que le problème (P) est convexe. Soit x^ un point admissible pour (P). S'il existe $\lambda^* \in \mathbb{R}^m$ tel que les conditions de KKT sont satisfaites alors x^* est un minimum global de (P).*

Conditions nécessaires : Si x^ est un minimum global du problème (P) et si la condition de Slater est satisfaite ($\exists \tilde{x}$ tel que $g_i(\tilde{x}) < 0$, $i = 1, \dots, n$), alors il existe $\lambda^* \in \mathbb{R}^m$ tel que les conditions de KKT sont satisfaites.*

C. Théorème de Danskin

Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble non vide et fermé, et soit $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble ouvert non vide. Supposons :

- $f : \mathcal{O} \times K \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto f(x, y)$ est continue sur $\mathcal{O} \times K$.
- $\nabla_x f(\cdot, \cdot)$ existe et est continue sur $\mathcal{O} \times K$.

Définissons $g : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ par

$$g(x) \equiv \sup_{y \in K} f(x, y) \quad \forall x \in \mathcal{O}.$$

Pour chaque $x \in \mathcal{O}$ définissons l'ensemble suivant :

$$\mathcal{M}(x) \equiv \{y \in K | g(x) = f(x, y)\} = \{y \in K | f(x, y) = \sup_{y \in K} f(x, y)\}$$

Théorème 5.5.2. Soit $\bar{x} \in K$. Supposons qu'il existe un voisinage $\mathcal{N}(\bar{x})$ de \bar{x} tel que $\mathcal{M}(x') \neq \emptyset$ pour tout $x' \in \mathcal{N}(\bar{x})$. Supposons de plus,

$$\bigcup_{x' \in \mathcal{N}(\bar{x})} \mathcal{M}(x') \text{ est bornée}$$

Alors les assertions suivantes sont vérifiées :

1. $g(\cdot)$ est différentiable en \bar{x} , et nous avons

$$g'(\bar{x}, d) = \sup_{y \in \mathcal{M}(\bar{x})} \langle \nabla_x f(\bar{x}, y), d \rangle.$$

2. Si $\mathcal{M}(\bar{x}) = \{y(\bar{x})\}$, alors $g(\cdot)$ est différentiable au sens de Gâteaux en \bar{x} et

$$\nabla g(\bar{x}) = \nabla_x f(\bar{x}, y(\bar{x})).$$

D. Semi-continuité

Définition 5.5.2. Soit $\bar{x} \in X$. L'application $K(\cdot)$ est dite

- semi-continue supérieurement (ou fermée) en \bar{x} si

$$\left. \begin{array}{l} \{x_k\} \in X \text{ et } x_k \rightarrow \bar{x} (k \rightarrow \infty) \\ y_k \in K(x_k) \\ y_k \rightarrow \bar{y} (k \rightarrow \infty) \end{array} \right\} \Rightarrow \bar{y} \in K(\bar{x}).$$

- semi-continue inférieurement en \bar{x} si $x_k \in X$ et $x_k \rightarrow \bar{x}$ implique que pour tout $\bar{y} \in K(\bar{x})$ il existe une suite $\{y_k\}$ avec $y_k \in K(x_k)$, tel que $y_k \rightarrow \bar{y} (k \rightarrow \infty)$;
- continue en \bar{x} si elle est semi-continue inférieurement et semi-continue supérieurement en \bar{x} ;
- continue sur X si et seulement si elle est continue en chaque point de X .

E. Caractérisation des équilibres

1. Les joueurs ne sont pas liés à la contrainte environnementale, c'est-à-dire que $\beta_1 = \beta_2 = 0$. Dans ce cas, le joueur qui investit à l'extérieur est celui qui a le plus haut coût de dommage (joueur 2). Utilisant les conditions nécessaires d'équilibre, nous avons

$$\begin{aligned} e_1 &= b_1 - d_1, & e_2 &= b_2 - d_2, \\ I_{11} &= \gamma_1 d_1, & I_{12} &= 0, & I_{21} &= \gamma_1 (d_2 - d_1), & I_{22} &= \gamma_2 d_2, \\ A_1 &= b_1 - d_1 (1 + \gamma_1^2), & A_2 &= b_2 - d_2 (1 + \gamma_1^2 + \gamma_2^2) + \gamma_1^2 d_1, \\ R_1 &= b_1 - d_1 - \gamma_1^2 d_2, & R_2 &= b_2 - d_2 (1 + \gamma_2^2). \end{aligned}$$

Cette solution satisfait les contraintes si

$$\begin{aligned}
I_{21} &\geq 0 : \gamma D \geq 0, \\
A_1 &\leq E_1 : b_1 \leq E_1 + d_1(1 + \gamma_1^2), \\
A_2 &\leq E_2 : b_2 \leq E_2 + \gamma_1^2 D + d_2(1 + \gamma_2^2), \\
R_1 &\geq 0 : b_1 \geq d_1 + \gamma_1^2 d_2, \\
R_2 &\geq 0 : b_2 \geq d_2(1 + \gamma_2^2).
\end{aligned}$$

De plus, nous devons avoir que $E_1 \geq \gamma_1^2 D$.

2. Le joueur 1 n'est pas lié à la contrainte environnementale et n'investit pas à l'étranger contrairement au joueur 2, c'est-à-dire que $\beta_1 = 0, \beta_2 \geq 0, I_{12} = 0$. Utilisant les conditions nécessaire d'équilibre, nous avons

$$\begin{aligned}
e_1 &= b_1 - d_1, \quad e_2 = \frac{b_2(\gamma_2^2 + \gamma_1^2 - d_1\gamma_1^2 + E_2)}{1 + \gamma_1^2 + \gamma_2^2}, \\
I_{11} &= \gamma_1 d_1, \quad I_{12} = 0, \quad I_{21} = \gamma_1 \frac{b_2 - E_2 - d_1(1 + \gamma_2^2)}{1 + \gamma_1^2 + \gamma_2^2}, \quad I_{22} = \gamma_2 \frac{b_2 - E_2 + \gamma_1^2 d_1}{1 + \gamma_1^2 + \gamma_2^2}, \\
A_1 &= b_1 - d_1(1 + \gamma_1^2), \quad \beta_2 = \frac{b_2 - E_2 + d_2(1 + \gamma_1^2 + \gamma_2^2) + \gamma_1^2 d_1}{1 + \gamma_1^2 + \gamma_2^2}, \\
R_1 &= b_1 - \frac{d_1(1 + \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_1^4) + \gamma_1^2(b_2 - E_2)}{1 + \gamma_1^2 + \gamma_2^2}, \quad R_2 = b_2 - d_2(1 + \gamma_2^2).
\end{aligned}$$

Cette solution satisfait les contraintes si

$$\begin{aligned}
I_{21} &\geq 0 : b_2 \geq d_1(1 + \gamma_2^2) + E_2 \\
\beta_2 &\geq 0 : b_2 \geq d_2(1 + \gamma_2^2) + \gamma_1^2 D + E_2 \\
A_1 &\leq E_1 : b_1 \leq E_1 + d_1(1 + \gamma_1^2) \\
R_1 &\geq 0 : d_1(1 + \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_1^4) + \gamma_1^2(b_2 - E_2) \leq b_1(1 + \gamma_1^2 + \gamma_2^2) \\
R_2 &\geq 0 : b_2 \geq \frac{(1 + \gamma_2^2)(\gamma_1^2 d_1 - E_2)}{\gamma_1^2}
\end{aligned}$$

3. Le cas symétrique au cas ci-dessus, requiert les conditions suivantes sur les valeurs des paramètres :

$$\begin{aligned}
I_{12} &\geq 0 : b_1 \geq d_2(1 + \gamma_1^2) + E_1 \\
\beta_1 &> 0 : b_1 > d_1(1 + \gamma_1^2) - \gamma_2^2 D + E_1 \\
A_2 &\leq E_2 : b_2 \leq E_2 + d_2(1 + \gamma_2^2) \\
R_2 &\geq 0 : d_2(1 + \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_2^4) + \gamma_2^2(b_1 - E_1) \leq b_2(1 + \gamma_1^2 + \gamma_2^2) \\
R_1 &\geq 0 : b_1 \geq \frac{(1 + \gamma_1^2)(\gamma_2^2 d_2 - E_1)}{\gamma_2^2}
\end{aligned}$$

4. Le joueur 1 est lié à la contrainte environnementale et n'investit pas à l'étranger tandis que le joueur 2 est lié à la contrainte environnementale, c'est-à-dire que $\beta_2 = 0, \beta_1 \geq 0, I_{12} = 0$. Ils vérifient

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{E_1 + \gamma_1^2 b_1}{1 + \gamma_1^2}, \quad e_2 = b_2 - d_2, \\ I_{11} &= \gamma_1 \frac{b_1 - E_1}{1 + \gamma_1^2}, \quad I_{12} = 0, \quad I_{21} = \gamma_1 \frac{E_1 - b_1 + d_2(1 + \gamma_1^2)}{1 + \gamma_1^2}, \quad I_{22} = \gamma_2 d_2, \\ \beta_1 &= \frac{b_1 - E_1 - d_1(1 + \gamma_1^2)}{1 + \gamma_1^2}, \quad A_2 = b_2 - d_2(1 + \gamma_1^2 + \gamma_2^2) + \frac{\gamma_1^2(b_1 - E_1)}{1 + \gamma_1^2}, \\ R_1 &= \frac{E_1 - \gamma_1^2(d_2(1 + \gamma_1^2) - b_1)}{1 + \gamma_1^2}, \quad R_2 = b_2 - d_2(1 + \gamma_2^2) \geq 0 \end{aligned}$$

Cette solutions satisfait les contraintes si

$$\begin{aligned} I_{21} \geq 0 : b_1 &\leq d_2(1 + \gamma_1^2) + E_1, \\ \beta_1 \geq 0 : b_1 &\geq d_1(1 + \gamma_1^2) + E_1, \\ A_2 \leq E_2 : b_2 &\leq E_2 + d_2(1 + \gamma_1^2 + \gamma_2^2) - \frac{\gamma_1^2(b_1 - E_1)}{1 + \gamma_1^2}, \\ R_1 \geq 0 : b_1 &\geq d_2(1 + \gamma_1^2) - \frac{E_1}{\gamma_1^2}, \\ R_2 \geq 0 : b_2 &\geq d_2(1 + \gamma_2^2). \end{aligned}$$

5. Le cas où le joueur 1 n'est pas lié à la contrainte environnementale et où le joueur 2 n'investit pas à l'étranger mène à une contradiction. En effet, ce cas signifie que $\beta_1 = 0, \beta_2 \geq 0$ et $I_{21} = 0$ d'où $d_2 - d_1 + \beta_2 - \beta_1 > 0$ implique $I_{21} > 0$.
6. Les deux joueurs ne sont pas liés à la contrainte environnementale et le joueur 1 n'investit pas à l'étranger, c'est-à-dire $\beta_1 \geq 0, \beta_2 \geq 0, I_{21} = 0$. Ils vérifient

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{E_1 + \gamma_1^2 b_1}{1 + \gamma_1^2}, \\ I_{11} &= \gamma_1 \frac{b_1 - E_1}{1 + \gamma_1^2}, \quad I_{22} = \gamma_2 \frac{\gamma_1^2(b_1 - E_1) + (1 + \gamma_1^2)(b_2 - E_2)}{(1 + \gamma_1^2)(1 + \gamma_1^2 + \gamma_2^2)}, \\ \beta_1 &= \frac{b_1 - E_1 - d_1(1 + \gamma_1^2)}{1 + \gamma_1^2}, \\ R_1 &= \frac{E_1(1 + \gamma_1^2 + \gamma_1^4 + \gamma_2^2) + \gamma_1^2 b_1(1 + \gamma_1^2) - \gamma_1^2(1 + \gamma_1^2)(b_2 - E_2)}{(1 + \gamma_1^2)(1 + \gamma_1^2 + \gamma_2^2)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e_2 &= \frac{b_2(1 + \gamma_1^2)(\gamma_1^2 + \gamma_2^2) - \gamma_1^2(b_1 - E_1) + E_2(1 + \gamma_1^2)}{(1 + \gamma_1^2)(1 + \gamma_1^2 + \gamma_2^2)} \\
I_{12} &= 0 \\
I_{21} &= \gamma_1 \frac{(1 + \gamma_1^2)(b_2 - E_2) - (1 + \gamma_2^2)(b_1 - E_1)}{(1 + \gamma_1^2)(1 + \gamma_1^2 + \gamma_2^2)} \\
\beta_2 &= \frac{\gamma_1^2(b_1 - E_1) + (1 + \gamma_1^2)(b_2 - E_2 - d_2(1 + \gamma_1^2 + \gamma_2^2))}{(1 + \gamma_1^2)(1 + \gamma_1^2 + \gamma_2^2)} \\
R_2 &= \frac{(1 + \gamma_1^2)(b_2\gamma_1^2 + E_2(1 + \gamma_2^2)) + \gamma_1^2(1 + \gamma_2^2)(b_1 - E_1)}{(1 + \gamma_1^2)(1 + \gamma_1^2 + \gamma_2^2)}
\end{aligned}$$

qui satisfait les contraintes si

$$\begin{aligned}
I_{21} \geq 0 : b_1(1 + \gamma_2^2) - b_2(1 + \gamma_1^2) &\leq E_1(1 + \gamma_2^2) - E_2(1 + \gamma_1^2) \\
\beta_1 \geq 0 : b_1 &\geq d_1(1 + \gamma_1^2) + E_1 \\
\beta_2 \geq 0 : b_2 &\geq E_2 + d_2(1 + \gamma_1^2 + \gamma_2^2) - \frac{\gamma_1^2(b_1 - E_1)}{1 + \gamma_1^2} \\
R_1 \geq 0 : b_2(1 + \gamma_1^2) - b_1(1 + \gamma_2^2) &\leq E_2(1 + \gamma_1^2) + E_1(1 + \gamma_1^2) + \frac{E_1(1 + \gamma_2^2)}{\gamma_1^2} \\
R_2 \geq 0 : b_1(1 + \gamma_2^2) - b_2(1 + \gamma_1^2) &< E_2(1 + \gamma_2^2) \frac{1 + \gamma_1^2}{\gamma_1^2} + E_1(1 + \gamma_1^2)
\end{aligned}$$

7. Le cas symétrique $\beta_1 \geq 0, \beta_2 \geq 0, I_{21} = 0$ requiert les conditions suivantes sur les paramètres :

$$\begin{aligned}
I_{12} \geq 0 : b_2(1 + \gamma_1^2) - b_1(1 + \gamma_2^2) &\leq E_2(1 + \gamma_1^2) - E_1(1 + \gamma_2^2) \\
\beta_1 \geq 0 : \gamma_2^2 b_2 + b_1(1 + \gamma_2^2) &\geq \gamma_2^2 E_2 + (1 + \gamma_2^2)(E_1 + d_1(1 + \gamma_1^2 + \gamma_2^2)) \\
\beta_2 \geq 0 : b_2 &\geq E_2 + d_2(1 + \gamma_2^2) \\
R_1 \geq 0 : b_2(1 + \gamma_1^2) - b_1(1 + \gamma_2^2) &< E_2(1 + \gamma_1^2) + E_1(1 + \gamma_1^2) \frac{E_1(1 + \gamma_2^2)}{\gamma_2^2} \\
R_2 \geq 0 : b_2(1 + \gamma_1^2) - b_1(1 + \gamma_2^2) &> -\frac{E_2(1 + \gamma_1^2)}{\gamma_2^2} - E_2(1 + \gamma_2^2) - E_1(1 + \gamma_2^2)
\end{aligned}$$

Bibliographie

- [1] Aussel D., Dutta J. (2008), *Generalized Nash equilibrium problem, variational inequality and quasiconvexity*, Operations Research Letters, Vol.36, pp. 461-464.
- [2] Blum E., Oettli W. (1994), *From optimization and variational inequalities to equilibrium problems*, The Mathematics Student, Vol.63, pp. 123-145.
- [3] Breton M., Zaccour G., Zahaf M. (2005), *A game-theoretic formulation of joint implementation of environmental projects*, European Journal of Operational Research, Vol.168, pp. 221-239.
- [4] Facchinei F., Fischer A., Piccialli V. (2006), *On generalized Nash games and variational inequalities*, Operations Research Letters, Vol.35, pp. 159-164.
- [5] Facchinei F., Kanzow C. (2007), *Generalized Nash equilibrium problems*, 4OR : A Journal of Operations Research Societies, Vol.5, pp. 173-210
- [6] Facchinei F., Pang J.S. (2003), *Finite-Dimensional Variational Inequalities and Complementarity Problems*, Springer, New York.
- [7] Marcotte P., Savard G., Zhu D. (2009), *Mathematical structure of a bilevel strategic pricing model*, European Journal of Operational Research, Vol.193, pp. 552-566.
- [8] Nguyen V.H. (2004), *An Introduction to Variational Inequalities and Related Problems*, Cours donné à l'Institut de Mathématique de Hanoi, Vietnam.
- [9] Panigucci B., Pappalardo M., Passacantando M. (2009), *On solving generalized Nash equilibrium problems via optimization*, Optimization Letters, Vol.3, pp. 419-435.

- [10] Qu B., Li J., Zhao Z. (2007), *A hybrid method for the generalized Nash equilibria*, International Journal of Nonlinear Science, Vol.4, pp.135-140.
- [11] Rockafellar R.T. (1970), *Convex Analysis*, Princeton Press University, Princeton.
- [12] von Heusinger A., Kanzow C. (2007), *Optimization reformulations of the generalized Nash equilibrium problem using Nikaido-Isoda-type functions*, Comput. Optim. Appl., Vol.3, pp. 353-377.
- [13] von Heusinger A., Kanzow C. (2009), *Relaxation methods for generalized Nash equilibrium problems with inexact line search*, J. Optim. Theory Appl., Vol.143, pp. 159-183.
- [14] von Heusinger A., Kanzow C., Fukushima M. (2009), *Newton's method for computing a normalized equilibrium in the generalized Nash game through fixed point formulation*, Technical Report 2009-006.
- [15] Zhang J., Qu B., Xiu N. (2008), *Some projection-like methods for the generalized Nash equilibria*, Computational Optimization and Applications, Vol.45, pp.89-109.